Mathématiques

Cahier de vacances du professeur X. de Suresnes

Pierre Girard, François Delaplace,
Professeurs de Mathématiques,
lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles).

Est-on irrémédiablement nul en math ? Non, les mathématiques sont un jeu ; pour gagner, il faut en connaître les règles et les appliquer. Certains exercices, principalement en option scientifique, font appel à l'intuition; mais ils sont rares, ou il ne s'agit alors que de quelques questions. Soyez persuadé que vous pourrez obtenir une bonne note, aux épreuves des concours que vous passerez l'an prochain, pourvu que :

• **vous connaissiez** les théorèmes et les propriétés du cours.
• vous ayez une **rédaction** standard (sans originalité) des réponses aux questions posées.

Ce dernier point signifie, que :
• vous devez rédiger les calculs sans embrouiller le correcteur,
• vous devez rédiger une démonstration en **vérifiant chacune des hypothèses** de la propriété ou du théorème.

Certes, pour répondre aux questions, il faut :
• ne pas gaspiller toute son énergie dans les **calculs**
• non seulement connaître le cours mais il faut aussi le **reconnaître** dans un exercice.

Vous serez d'autant plus à l'aise dans les calculs que vous serez entraîné à en faire. Vous serez d'autant plus habile à reconnaître l'application d'une propriété ou d'un théorème que vous vous serez entraîné à en reconnaître.

C'est sur ces deux points qu'intervient l'entraînement.

Pour tenter de justifier ces affirmations, on a imaginé l'entretien d'un étudiant (virtuel) de première année en option économique avec un professeur (toute ressemblance...).

Cet article s'adresse aussi bien aux étudiants d'option économique que scientifique.

Comment faire des progrès en math

Ce matin c'est le conseil de classe et Jérémie n'est pas fier ; certes, son admission en seconde année ne pose pas de problème, mais ses difficultés en mathématiques ne lui permettent pas d'espérer un succès à l'une des écoles qu'il convoitait.

"Quand le prof explique, je comprends, mais je ne suis pas capable de refaire les démonstrations, même avec le cours sous les yeux", gémit Jérémie. *"Dans un problème, je ne suis pas capable de reconnaître une application déjà rencontrée, et même si je la reconnaîs, je ne suis pas capable de la refaire, quand bien même je l'aurais faite dix fois. C'est désespérant, je travaille et je n'y arrive pas ; et en plus, quand je fais un calcul ou une démonstration, le professeur dit toujours que c'est mal rédigé"*.

Le professeur Xavier de Suresnes, spécialiste des cas désespérés en mathématiques , écoute les lamentations de Jérémie. *"Je vois, je vois..."* dit-il parfois en écrivant des signes ésotériques sur un carnet.

Après quelques instants, il pose son stylo et son carnet, se lève et se dirige vers Jérémie : *"Nous allons faire un test ; tu vas lire attentivement cette partie du cours sur les intégrales impropres ; c'est un chapitre qui sera traité en seconde année ; puis tu feras l'exercice qui suit"*. Il remet des documents à Jérémie ; on pouvait y lire ceci :

Intégrales impropres

1. Fonctions localement intégrables sur un intervalle I de la forme $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$

On dit qu'une fonction f est localement intégrable sur I (a et b éventuellement infinis), si elle est intégrable sur tout segment inclus dans cet intervalle.

Exemple: La fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est localement intégrable sur $]0,+\infty[$ car f est intégrable sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

Propriété:

Si f est une fonction continue sur I, alors f est localement intégrable sur I.

2. Fonctions intégrables sur un intervalle I de la forme $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$

On dit qu'une fonction f, localement intégrable sur $]a,b]$, est intégrable sur $]a,b]$, si la fonction $x \alpha \int_x^b f(t)dt$ a une limite lorsque x tend vers a.

On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge

De même :

On dit qu'une fonction f, localement intégrable sur $[a,b[$, est intégrable sur $[a,b[$, si la fonction $x \alpha \int_a^x f(t)dt$ a une limite lorsque x tend vers b.

On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge

Enfin

On dit qu'une fonction f, localement intégrable sur $]a,b[$, est intégrable sur $]a,b[$, si pour tout réel c de $]a,b[$, les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes.

On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge

Exemple 1:

1. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente car :

   la fonction $x \alpha \frac{1}{\sqrt{x}}$ est **localement intégrable** sur $]0,1]$

   $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$ a une **limite** lorsque x tend vers 0

   On note $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x \to 0}\left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2$

2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ n'est pas convergente (on dit aussi qu'elle est divergente) car :

   la fonction $x \alpha \frac{1}{\sqrt{x}}$ est **localement intégrable** sur $[1,+\infty[$

   mais $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$ n'a **pas de limite** (finie) lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemple 2: Calculer :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

On remarque que la fonction $t \alpha \frac{1}{t^2}$ est **continue** sur $[1,+\infty[$, elle est donc **localement intégrable** sur $[1,+\infty[$.

Ainsi pour tout réel x plus grand que 1, l'intégrale $\int_1^x \frac{dt}{t^2}$ existe et

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1$$

La fonction $x \alpha -\frac{1}{x} + 1$ **a une limite** lorsque x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ **est convergente et**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x} + 1\right) = 1$$

3. Intégrales de référence, critère de convergence et linéarité des intégrales convergentes

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *est convergente si $\alpha < 1$, divergente si $\alpha \geq 1$.*

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leq 1$.*

Propriété:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a,b[$ ou $]a,b]$. Si :

f est localement intégrable sur I
f est positive sur I
il existe une fonction g définie sur I telle que pour tout x élément de I.

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad et \qquad \int_a^b g(t)dt \ \ converge$$

alors $\int_a^b f(t)dt$ converge

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a,b[$ ou $]a,b]$. Si :

f est localement intégrable sur I
f est positive sur I
il existe une fonction g définie sur I telle que pour tout x élément de I,

$$0 \le g(x) \le f(x) \qquad et \qquad \int_a^b g(t)dt \ \ diverge$$

alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge

Exemple 3: On admettra ici que, pour tout réel t supérieur ou égal à 1,

$$0 \le \frac{\ln t}{t} \le 1$$

Déterminer la nature (convergence ou divergence) de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt$$

On a successivement :

f **localement intégrable** sur $[1,+\infty[$ car continue sur cet intervalle

Exercice .

1. Calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

2. Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n} dt$

pour tout réel t plus grand que 1, $\frac{\ln t}{t^3}$ est **positif**

enfin, $\frac{\ln t}{t^3} = \frac{\ln t}{t} \times \frac{1}{t^2} \le \frac{1}{t^2}$; ainsi on a pour tout réel $t \geq 1$:

$$0 \le f(t) \le \frac{1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \ \ \textbf{convergente}$$

pour tout réel t plus grand que 1, $\frac{\ln t}{t^2}$ est **positif**

enfin, $\frac{\ln t}{t^3} = \frac{\ln t}{t} \times \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$; ainsi on a pour tout réel $t \geq 1$:

$$0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \ \textbf{convergente}$$

Il résulte de ces trois propriétés que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3}\, dt$ est **convergente.**

Propriété de linéarité

Si $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent, alors*

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]dt$$

convergent et

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

a) *Montrer que, pour tout entier naturel n, I_n existe (on ne demande pas de calculer sa valeur).*

b) *Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n < I$.*

c) *Montrer que la suite (I_n) est convergente*

Jérémie resta longtemps sans rien faire devant un énoncé aussi déconcertant ;
il finit cependant par écrire !!!!!!??????

1. $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

2a On a $(\cos t)^{2n} \leq 1$ donc $e^{-t}(\cos t)^{2n} \leq e^{-t}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\, dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} dt\,.$$

2b On a montré que $I_n < I$.

2c (I_n) est croissante et majorée donc convergente.

X de Suresnes jeta un coup d'œil sur le travail de Jérémie :
- C'est affligeant- finit il par dire - la première question est un calcul d'intégrale impropre ; où en vois-tu un dans le cours ci-joint ?

- Mais on n'a jamais fait ça - commença à protester Jérémie

- Je le sais bien, - coupa X de Suresnes - mais je te donne tous les éléments pour traiter cet exercice : le jour du concours tu peux aussi tomber sur quelque chose de jamais vu ; tu devras utiliser les indices donnés dans l'énoncé. Je répète ma question : où vois-tu un calcul d'intégrale impropre dans le cours ci-joint ?

- Dans l'exemple 2

Compare ce que tu as écrit et ce qui est écrit dans cet exemple … ; on a d'abord justifié que la fonction à intégrer était localement intégrable ; où est-ce sur la feuille ?

- Pourquoi ? il faut le dire ? ça sert à quoi ?

- Si tu avais bien lu le corrigé de cet exercice, tu aurais remarqué que pour calculer une intégrale impropre sur un intervalle $[0, +\infty[$, on calcule l'intégrale de la fonction sur un intervalle $[0, x]$ avec x plus grand que 0, puis on fait tendre x vers $+\infty$; mais avant de calculer $\int_0^x e^{-t}dt$, on doit d'abord justifier son existence, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est localement intégrale.

Qu'est-ce que je fais ?

- La même chose que dans l'exemple 2.

Jérémie reprit sa copie et corrigea :

On remarque que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$, *elle est donc localement intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Ainsi pour tout réel x plus grand que 0, l'intégrale $\int_0^x e^{-t}dt$ *existe et*

$$\int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1$$

La fonction $x \mapsto -e^{-x} + 1$ *a une limite lorsque x tend vers* $+\infty$, *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *est convergente et*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x} + 1\right) = 1$$

- Là, tu n'as pas fais preuve d'originalité mais au moins ça veut dire quelque chose : d'abord tu justifies le calcul des intégrales de la forme $\int_0^x e^{-t}dt$, ensuite tu effectues le calcul et enfin tu écris correctement, et non dans un charabia incompréhensible, que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x e^{-t}dt$.

Maintenant tu peux reprendre la deuxième question.

- Il faut montrer que I_n existe ; ça ressemble à l'exemple 3. Reprenons :

On a successivement :

f, c'est-à-dire $t \mapsto e^{-t}(\cos t)^{2n}$ *localement intégrable sur* $[0, +\infty[$ *car continue sur cet intervalle*

pour tout réel t plus grand que 0, $0 \le e^{-t}(\cos t)^{2n}$ *est positif car le cosinus élevé à une puissance d'exposant paire est positif*

enfin, $0 \le (\cos t)^{2n} \le 1$, *donc* $0 \le e^{-t}(\cos t)^{2n} \le e^{-t}$ *; ainsi on a pour tout réel* $t \ge 0$ *:*

$$0 \le f(t) \le e^{-t} \qquad \textit{et} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \ \textit{convergente}$$

Il résulte de ces trois propriétés que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\,dt$ *est convergente ; et voilà pour la question 2a)*

- Bien ; la propriété donnée permet en effet de conclure que I_n existe mais pas, comme tu l'avais d'abord écrit, que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\,dt \le \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \ ;$$

tu peux continuer.

- Après c'est facile ; comme on a $0 \le f(t) \le e^{-t}$, on a donc

$$0 \le \int_0^{+\infty} f(t)dt \le \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$$

- Non ; je ne t'ai donné aucune propriété de ce genre sur les intégrales impropres. La croissance de l'intégrale n'est applicable que pour des intégrales sur des segments.

- Comment fait-on ?

- On s'y ramène, en revenant à la définition d'une intégrale impropre convergente.

- Si j'ai bien compris, on doit écrire que *pour tout x positif,*

$$0 \le f(t) \le e^{-t} \Rightarrow 0 \le \int_0^x f(t)dt \le \int_0^x e^{-t}dt$$

et après, on peut passer à la limite ?

- Tu le sais ; les limites conservent-elles les inégalités larges ?

- Oui, c'est une propriété du cours sur les limites.

- Alors ?

- *Alors, par passage à la limite,* $0 \le \int_0^{+\infty} f(t)dt \le \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$

- Bien ; tu peux passer à la question suivante.

- La suite (I_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

- Quoi ? Mais où as-tu montré qu'elle était croissante ?

- Mais puisqu'elle est majorée !

- Où as-tu vu la proposition : " Toute suite majorée est croissante " ?

- Nulle part, mais c'est toujours comme ça.

- Rien n'est plus faux ; n'invente jamais une propriété ; retiens bien **qu'une proposition qui ressemble à une propriété du cours est presque sûrement fausse.**

- Alors, comment on fait ? On le démontre ?

Bon ; *on va calculer* $I_n - I_{n+1}$ *; on a :*

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2(n+1)}dt$$

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty}\left[e^{-t}(\cos t)^{2n} - e^{-t}(\cos t)^{2n+2}\right]dt$$

- Pourquoi ?

- C'est une propriété des intégrales

- ...

- Ah oui, je vois ; c'est dans le cours des intégrales impropres : " Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b [f(t) - g(t)]dt$ convergent et $\int_a^b [f(t) - g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt$ ". On peut donc écrire,

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty}\left[e^{-t}(\cos t)^{2n} - e^{-t}(\cos t)^{2n+2}\right]dt$$

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty}\left[1 - (\cos t)^2\right](\cos t)^{2n}e^{-t}dt$$

Pour tout réel t positif,

$$0 \le (\cos t)^2 \le 1$$

donc

$$0 \le 1 - (\cos t)^2 \le 1$$

et donc

$$0 \le \left[1 - (\cos t)^2\right](\cos t)^{2n}e^{-t} \le (\cos t)^{2n}e^{-t}$$

Tiens c'est marrant, on trouve $I_n - I_{n-1} \ge 0$: la suite est donc décroissante ; il faut alors trouver un minorant !

- Eventuellement ; mais tu n'as pas montré que $I_n - I_{n-1} \ge 0$

- Ah oui, c'est vrai *; on a pour tout réel t positif,*

$$0 \le \left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^{2n} e^{-t} \le (\cos t)^{2n} e^{-t}$$

donc, pour tout réel x positif,

$$0 \le \int_0^x \left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt \le \int_0^x (\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt$$

Par passage à la limite, on a :

$$0 \le \int_0^{+\infty} \left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt \le \int_0^{+\infty} (\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt$$

En ne gardant que la première inégalité, on obtient $I_n - I_{n+1} \ge 0$ *et donc* (I_n) *est décroissante. D'autre part, la seconde inégalité montre que*

$$0 \le \int_0^{+\infty} (\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt$$

et donc que** (I_n) **est minorée par 0.

On peut conclure : (I_n) *est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.*

- Parfait ; tu vois que tu peux réussir en mathématiques, en apprenant ton cours de façon rigoureuse et en l'appliquant. Si tu veux réussir les concours que tu ambitionnes, alors tu t'attacheras à faire pour chaque exercice ce que nous avons fait ensemble.

- Alors si je fais comme on a fait, je réussirai ?

X. de Suresnes lui jeta une oeillade incendiaire :
- J'ai dit «Si...». Tu n'as pas beaucoup de chances de réussir en confondant les conditions nécessaires avec les conditions suffisantes !

Corrigé de l'exercice par Jérémie

1. On remarque que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, elle est donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Ainsi pour tout réel x plus grand que 0, l'intégrale $\int_0^x e^{-t}\,dt$ existe et

   $$\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x}+1$$

   La fonction $x \mapsto -e^{-x}+1$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}+1\right) = 1$$

2a On a successivement :

$t \mapsto e^{-t}(\cos t)^{2n}$ localement intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur cet intervalle

pour tout réel t plus grand que 0, $0 \le e^{-t}(\cos t)^{2n}$ est positif car le cosinus élevé à une puissance d'exposant paire est positif

enfin, $0 \le (\cos t)^{2n} \le 1$, donc $0 \le e^{-t}(\cos t)^{2n} \le e^{-t}$; ainsi on a pour tout réel $t \ge 0$:

$$0 \le e^{-t}(\cos t)^{2n} \le e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \text{ convergente}$$

Il résulte de ces trois propriétés que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\,dt$ est convergente.

2b Pour tout x positif,

$$0 \le e^{-t}(\cos t)^{2n} \le e^{-t} \Rightarrow 0 \le \int_0^x e^{-t}(\cos t)^{2n}\,dt \le \int_0^x e^{-t}\,dt$$

Par passage à la limite, $0 \le \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\,dt \le \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$

2c On va calculer $I_n - I_{n+1}$; on a :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2(n+1)}\,dt$$

Les deux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2n}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos t)^{2(n+1)}\,dt$ étant convergentes, il en est de même de leur différence et de plus :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty}\left[e^{-t}(\cos t)^{2n} - e^{-t}(\cos t)^{2n+2}\right]dt$$

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty}\left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt$$

Pour tout réel t positif,

$$0 \le (\cos t)^2 \le 1$$

donc

$$0 \le 1-(\cos t)^2 \le 1$$

et donc

$$0 \le \left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^{2n} e^{-t} \le (\cos t)^{2n} e^{-t}$$

donc, pour tout réel x positif,

$$0 \le \int_0^x \left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt \le \int_0^x (\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt$$

Par passage à la limite, on a :

$$0 \le \int_0^{+\infty} \left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt \le \int_0^{+\infty} (\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt$$

En ne gardant que la première inégalité, on obtient $I_n - I_{n+1} \ge 0$ et donc (I_n) est décroissante. D'autre part, la seconde inégalité montre que

$$0 \le \int_0^{+\infty} (\cos t)^{2n} e^{-t}\,dt$$

et donc que (I_n) est minorée par 0.

On peut conclure :

(I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Quelques jours plus tard, Jérémie reçut par courrier un pli assez volumineux. Un mot y était joint : *Pour t'entraîner, je te conseille de rédiger et non de griffonner sur un coin de feuille les quelques exercices suivants. Je te souhaite de bonnes vacances.*

Signé x^2/n

Entraînement

Suites.

<u>**Exercice 1:**</u> *Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par:*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad et \quad u_0 = 1$$

Solution

On a, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$$

Montrons que pour tout entier naturel n, u_n est positif; il en résultera que la suite (u_n) est une suite croissante.
On a $u_0 = 1 > 0$; supposons, que pour un entier n quelconque fixé, $u_n > 0$; on va en déduire que $u_{n+1} > 0$.
C'est vraiment très simple; si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$ comme somme de deux nombres positifs et non nuls.
Conséquence: (u_n) est une suite croissante.

Le raisonnement suivant est faux:

> Si une suite (u_n) était une suite divergente, de limite $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$; il en résulterait que $(u_{n+1} - u_n) \to 0$ et donc (u_n) ne peut pas être une suite divergente.

La première partie du raisonnement est juste. En effet, si une suite (u_n) est une suite divergente, de limite $+\infty$, alors son inverse est une suite convergente de limite 0 et on a aussi, bien sûr, $(u_{n+1} - u_n) \to 0$.
Cependant, pour qu'une suite soit convergente, **il faut** que la différence entre deux termes consécutifs de la suite tende vers 0; mais la réciproque est fausse: si la différence entre deux termes consécutifs d'une suite tend vers 0, **cela n'implique pas** que la suite soit convergente (on étudiera la suite (v_n) définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$)

En revanche, le raisonnement suivant est juste:

On recherche d'abord la ou les limites possibles de cette suite:

Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Elle est continue sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Si (u_n) est convergente de limite l, alors $f(l) = l$ et $l \geqslant 0$.
On résout l'équation

$$\begin{cases} f(l) = l \\ l \geq 0 \end{cases}$$

Après réduction, on trouve:

$$\begin{cases} \frac{1}{l} = 0 \\ l \geq 0 \end{cases}$$

ce qui, manifestement, est impossible.
La suite (u_n) n'est donc pas convergente et comme elle est croissante, on en déduit qu'elle tend vers $+\infty$.

<u>**Exercice 2.**</u> *On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par:*

$$u_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Un étudiant propose la solution suivante:

> On a:
> $$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$$
> Quel que soit l'entier n, $1^n = 1$; et par suite, on a:
> $$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 1^n = 1$$
> Il en résulte que (u_n) est convergente de limite 1.

Un autre étudiant propose la solution suivante:

> Pour tout entier naturel n supérieur à 2,
> $$0 < 1 - \frac{2}{n} < 1$$
> Or, quel que soit le réel $q \in]0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Il en résulte que (u_n) est convergente de limite 0.

Ces deux solutions sont fausses; pourquoi?

Donner une méthode pour le calcul de la limite de (u_n).

Solution

Dans un cas comme dans l'autre, pour calculer la limite demandée, on calcule des limites partielles:

Le premier étudiant considère **d'abord** la limite de $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, **puis** de 1^n, ce qui est absurde car on ne peut pas faire tendre n vers l'infini dans une partie de l'expression sans le faire tendre vers l'infini dans toute l'expression; on obtient en fait une forme indéterminée 1^∞

Le second étudiant fixe une valeur de n et on remarque que $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ est un réel strictement compris entre 0 et 1; on l'élève à la puissance n; mais, si on dit " $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = 0$", on ne fait tendre que l'exposant vers l'infini.

A vrai dire, lorsque n tend vers l'infini, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ tend vers 1 et on retrouve la forme indéterminée, 1^∞.

Il existe trois formes indéterminées 1^∞, 0^0 et ∞^0 qui se traite de la même façon:
dans chacun de ces cas, l'exposant est variable, donc l'écriture donnée est celle d'une **exponentielle.**

Ecrivons le terme général de la suite sous forme exponentielle:

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{2}{n}\right)}$$

On calcule d'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

On peut utiliser les équivalents en $+\infty$:

$$n\ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) \sim n\left(-\frac{2}{n}\right)$$

$$n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\sim -2$$

On obtient alors:

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)=-2$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}=e^{-2}$$

c'est-à-dire:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=e^{-2}$$

Suites et calcul matriciel

***Exercice 3** : Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par:*

$$\begin{cases} u_{n+1}=6u_n-v_n \\ v_{n+1}=u_n+4v_n \end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2) Montrer que A peut s'écrire

$A=5I+J$ où $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et J une matrice qu'on précisera.

3) Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

4) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et de n.

Solution

1) C'est immédiat :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2) Posons J la matrice $A-5I$. On obtient immédiatement :

$$J=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors : $A=5I+J$

3) Calculons J^2. On a :

$$J^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or $IJ=JI$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton.

$$(5I+J)^n=5^nI+C_n^1(5^{n-1}I)J+p(J)J^2J$$

où $p(J)$ désigne un polynôme en J ; comme la matrice J^2 est la matrice nulle, on en déduit que :

$$(5I+J)^n=5^nI+C_n^1(5^{n-1}I)J$$

$$(5I+J)^n=5^nI+n5^nJ$$

Et par suite,

$$A^n=5^nI+n5^nJ$$

En effectuant les calculs :

$$A^n=\begin{pmatrix} 5^n(1+n) & -n5^n \\ n5^n & 5^n(1+n) \end{pmatrix}$$

4) On montre par récurrence que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

La relation est évidente pour $n=0$ car $A^0=I$. Supposons que pour un n quelconque mais fixé, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$; on doit en déduire que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

D'après la première question, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

on en déduit que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=AA^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire encore,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=(5^nI+n5^nJ)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5^n(1+n) & -n5^n \\ n5^n & 5^n(1+n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{cases} u_n=(1+n)5^nu_0-5^nnv_0 \\ v_n=5^nnu_0+(1+n)5^nv_0 \end{cases}$$

Fonctions numériques

***Exercice 4** : Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} f(x)=xe^{\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Et tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Solution

Variations de f.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$; par ailleurs, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=0=f(0)$ car $\frac{1}{x}\to-\infty$ tandis que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ car $\frac{1}{x}\to+\infty$

Il en résulte que f est continue en 0 à gauche mais pas à droite.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme produit et composition de fonctions de référence ; on a

$$\forall x\in IR^*,\quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=e^{\frac{1}{x}}$$

de limite 0 en 0 par valeur inférieure ; il en résulte que f est dérivable en 0 à gauche et $f'_g(0)=0$

Pour tout réel x non nul,

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

La fonction f est croissante car de dérivée positive sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ et elle est décroissante sur $]0, 1[$ car de dérivée négative. On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 ‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Recherche des branches infinies :

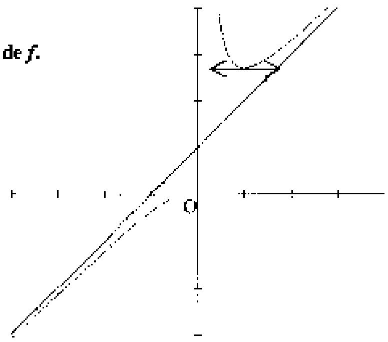
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1 \text{ car } \frac{1}{x}\to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers l'infini.}$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1$$

Il en résulte que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x + 1$ pour asymptote.

Représentation graphique de f.



Probabilités.

__Exercice 5__ : Une urne contient une boule blanche, une noire, une verte et une jaune. On en tire p successivement avec remise ($p \geqslant 4$).

a) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une boule de chaque couleur ?

b) Quelle est la probabilité que la première et la dernière soient de même couleur ?

Solution

Pour un tel exercice, il faut bien penser à donner une modélisation correcte de l'expérience:

Le plus naturel est de considérer comme univers de probabilité l'ensemble Ω des p-listes sans répétition de $\{B, N, V, J\}$; cet ensemble étant fini on prend comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et puisqu'on a autant de chances de tirer une série de p boules plutôt qu'une autre on prend sur Ω une probabilité uniforme sur les événements élémentaires. D'après le cours $\text{card}(\Omega)=4^p$

a) L'événement A = «au moins une boule de chaque couleur » est donc l'ensemble des p-listes de $\{B, N, V, J\}$ contenant au moins une fois chacune des lettres B, N, V et J. $\overline{A}$ est la réunion de l'ensemble A_1 des p-listes ne contenant que l'une des lettres B, N, V ou J (tirages unicolores), de l'ensemble A_2 des tirages bicolores et de l'ensemble A_3 des tirages tricolores. Il est clair que

$A_1 = \{(B, \ldots, B); (N, \ldots, N); (V, \ldots, V); (J, \ldots, J)\}$

donc $\text{card}(A_1)=4$. On en déduit que :

$$p(A_1)=\frac{4}{4^p}=\frac{1}{4^{p-1}}.$$

D'autre part pour construire un élément de A_2, il faut d'abord choisir les 2 couleurs (C_4^2 choix) puis pour chacun de ces choix il faut construire une p-liste formée de ces deux couleurs (2^p choix) et enlever les deux p-listes qui ne contiennent qu'une seule de ces deux couleurs. Ainsi :

$$\text{card}(A_2) = C_4^2\,(2^p-2)$$

et donc

$$p(A_2) = \frac{C_4^2\left(2^p-2\right)}{4^p}$$

De même, pour construire un élément de A_3, il faut d'abord choisir les 3 couleurs (C_4^3 choix) puis pour chacun de ces choix il faut construire une p-liste formée de ces trois couleurs (3^p choix) et enlever les p-listes qui ne contiennent qu'une seule de ces 3 couleurs (3 p-listes) et les p-listes qui ne contiennent que 2 de ces 3 couleurs (3×2^p p-listes). Ainsi :

$$\text{card}(A_3) = C_4^3\,(3^p-3-3\cdot 2^p)$$

ainsi

$$p(A_3) = \frac{C_4^3\,(3^p-3-3\cdot 2^p)}{4^p}$$

Puisque A_1 et A_2 sont incompatibles on a donc :

$$p(\overline{A})=\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{C_4^2\,(2^p-2)}{4^p}+\frac{C_4^3\,(3^p-3-3\cdot 2^p)}{4^p}$$

d'où

$$p(A)=1-\left(\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{C_4^2\,(2^p-2)}{4^p}+\frac{C_4^3\,(3^p-3-3\cdot 2^p)}{4^p}\right)$$

b) Soit B l'événement « la première et la dernière boule sont de même couleur ». Pour construire une telle p-liste on commence par choisir la couleur de la première et la dernière boule (4 choix) puis on complète par une $(p-2)$-liste de $\{B, N, V, J\}$ (4^{p-2} choix); donc $\text{card}(B) = 4.4^{p-2} = 4^{p-1}$ et donc $p(B) = \frac{4^{p-1}}{4^p}=\frac{1}{4}$.

__Exercice 6__ : Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

On jette p boules indiscernables dans n boîtes numérotées de 1 à n (toute boule lancée tombe de façon équiprobable dans l'une des boîtes)

a) Quelle est la probabilité que les boîtes 1, 2 et 3 soient les seules à recevoir (éventuellement) des boules ?

b) On suppose que $p = 3n$; Quelle est alors la probabilité que chaque boîte reçoive trois boules ?

Solution

Numérotons les boules de 1 à p et considérons comme univers de probabilité l'ensemble Ω des p-listes de $\{1, \ldots, n\}$

Un résultat de l'expérience (c'est-à-dire un élément ω de Ω !) étant par exemple (1, 2, 5, 7, 7,...) cela signifie que la boule n°1 va dans la boîte n°1, la boule n°2 va dans la boîte n°2, la boule n°3 va dans la boîte n°5, les boules n° 4 et 5 vont dans la boîte n°7 etc... ; cet ensemble étant fini on prend comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et puisqu'on a autant de chances que les boules aillent dans une série de boîtes plutôt que dans une autre, les événements élémentaires sont équiprobables donc :

$$\forall X \in \mathcal{P}(\Omega),\ p(X) = \text{card}(X)/\text{card}(\Omega).$$

D'après le cours $\text{card}(\Omega) = n^p$

a) Soit A = « les boîtes 1, 2 et 3 soient les seules à recevoir des boules »; cet événement est modélisé par l'ensemble des p-listes de $\{1, 2, 3\}$ donc $\text{card}(A)=3^p$. Ainsi :

$$p(A) = 3^p/n^p$$

b) Soit B l'événement « chaque boîte reçoit trois boules ». Pour construire un élément de B on choisit l'ensemble des trois boules mises dans la boîte n°1 (C_{3n}^3 choix puisqu'il s'agit d'un ensemble de 3 boules donc une 3-combinaison de $\{1, \ldots, 3n\}$); puis pour chacun de ces choix on choisit l'ensemble des 3 boules qui iront dans la boîte n°2 (C_{3n-3}^3 choix puisqu'il ne reste que $3n$-3 boules) etc... Au total on dénombre donc card(B) = $C_{3n}^3 \cdot C_{3n-3}^3 \cdot \ldots \cdot C_3^3$

ainsi :

$$p(B) = \frac{C_{3n}^3 \cdot C_{3n-3}^3 \cdot \ldots \cdot C_3^3}{n^{3n}}$$

c'est à dire, après simplification:

$$p(B) = \frac{(3n)!}{(6n^3)^n}$$

Les probabilités conditionnelles

Exercice 7 *:Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes $U_1,\ldots,U_n$ telles que pour tout entier k compris entre 1 et n, l'urne k contient k boules blanches et n-k boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard de cette urne.*

1°) Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?

2°) En effectuant un tel tirage, on s'aperçoit que la boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_n ?

Solution

1°) Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé modélisant cette situation.

Notons, pour tout entier k compris entre 1 et n, A_k = « utiliser l'urne n°k ». Notons B = « obtenir une boule blanche ». Le système d'événements $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales:

les tirages dans une urne donnée étant aléatoire, pour tout k on a donc:

$$p(B / A_k) = \frac{k}{n} \text{ et } p(A_k) = \frac{1}{n}$$

donc:

$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(B / A_k) p(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

2°) On cherche $p(A_n/B)$, on peut alors appliquer la formule de Bayes et écrire :

$$p(A_n / B) = \frac{p(B / A_n) p(A_n)}{\sum_{k=1}^{n} p(B / A_k) p(A_k)} = \frac{p(B / A_n) p(A_n)}{p(B)}$$

Finalement :

$$p(A_n / B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{(n+1)}{2n}} = \frac{2}{n+1}$$

Les variables aléatoires

Exercice 8 *: Une urne contient n boules numérotées de 1 à n; on effectue un tirage de k boules ($1 \leq k \leq n$).On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X dans les deux cas :*

a) tirages successifs avec remise;

b) tirage d'une poignée de k boules.

Solution

a) Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé modélisant cette situation; on a $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier i appartenant à $X(\Omega)$,Notons X_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tiré; }. Pour tout entier j appartenant à $X(\Omega)$, $(X \leq j) = (X_1 \leq j$ et $\wedge$ et $X_k \leq j)$.

Les évènements $(X_1 \leq j), \ldots, (X_k \leq j)$ sont indépendants dans le cas de tirages avec remise et il y a j boules parmi les n qui ont un numéro $\leq j$ (tirages équiprobables), donc :

$$p(X \leq j) = p(X_1 \leq j) \ldots p(X_k \leq j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

Pour tout entier j de $X(\Omega)$,

$$p(X = j) = p(j-1 < X \leq j) = p(X \leq j) - p(X \leq j-1)$$

(revoyez les propriétés des fonctions de répartition, on en aura encore besoin pour l'exercice suivant ; notez aussi que cette relation est même vrai pour $j = 1$). D'où la loi de X donnée par:

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\} \quad p(X = j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k - \left(\frac{j-1}{n}\right)^k$$

b) Soit Ω l'ensemble des k-combinaisons de $\{1, \ldots, n\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et d'une probabilité uniforme sur les événements élémentaires.; donc card(Ω)=C_n^k et $X(\Omega) = \{k, \ldots, n\}$et pour tout entier j appartenant à $X(\Omega)$, l'événement $(X \leq j)$ est l'ensemble des k-combinaisons de $\{1, \ldots, j\}$, sont cardinal est donc C_j^k. Ainsi

$$p(X \leq j) = \frac{C_j^k}{C_n^k}$$

De la même façon que précédemment, pour tout entier j de $X(\Omega)$,

$$p(X = j) = p(j-1 < X \leq j) = p(X \leq j) - p(X \leq j-1)$$

$$p(X = j) = \frac{C_j^k}{C_n^k} - \frac{C_{j-1}^k}{C_n^k} = \frac{C_j^k - C_{j-1}^k}{C_n^k} = \frac{C_{j-1}^{k-1}}{C_n^k}$$

Exercice 9 *: Soit p un élément de]0,1[. On note q = 1 - p; Soient X et Y deux variables aléatoires <u>indépendantes</u> sur un espace probabilisé suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.*

On note U = max{X, Y} et V = min{X, Y}.

1°) Donner la loi de U ainsi que, si elle existe, son espérance.

2°) Calculer, si elle existe, l'espérance de V.

Solution

1) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$. et pour tout entier naturel non nul k, on a :

$$p(U \leqslant k) = p(X \leqslant k \text{ et } Y \leqslant k) = p(X \leqslant k).p(Y \leqslant k)$$

puisque X et Y sont indépendantes; et donc:

$$p(U \leqslant k) = [p(X \leqslant k)]^2$$

puisque X et Y suivent la même loi.

$$p(X = k) = \sum_{i=1}^{k} p(X = i) = \sum_{i=1}^{k} q^{i-1} p = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k.$$

On a alors $\forall k \geqslant 2$:

$$p(U = k) = p(U \leqslant k) - p(U \leqslant k-1)$$

$$p(U = k) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2 = 2pq^{k-1} + (q^2 - 1)q^{2k-2}$$

et pour $k = 1$

$$p(U = 1) = p(U \leqslant 1) = (1 - q)^2 = p^2$$

ce cas rentre donc dans le cas général. Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$p(U = k) = 2pq^{k-1} + (q^2 - 1)q^{2(k-1)}$$

Cherchons si U a une espérance, c'est à dire si la série de terme général $k.p(X = k)$ est convergente. Etudions pour cela les sommes partielles S_N d'ordre N où $N \subset \mathbb{N}^*$.

$\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} kp(U = k) = \sum_{k=1}^{N} \left[2pkq^{k-1} + (q^2-1)k(q^2)^{k-1}\right]$$

$$S_N = 2p\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} + (q^2-1)\sum_{k=1}^{N} k(q^2)^{k-1}$$

Mais q et q^2 sont des éléments de $]0; 1[$ ce qui prouve que les 2 sommes précédentes ont une limite lorsque N tend vers $+\infty$, donc cela prouve que U a une espérance et que

$$\mathrm{E}(U) = 2p\frac{1}{(1-q)^2} - (q^2-1)\frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{2}{1-q} + \frac{1}{q^2-1} = \frac{1+2q}{1-q^2}$$

2°) On a :

$$U + V = \max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$$

(et oui!) donc la loi de $U + V$ est celle de $X + Y$ et donc

$$\mathrm{E}(U + V) = \mathrm{E}(X + Y)$$

Mais $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ donc $\mathrm{E}(U) + \mathrm{E}(V) = 2\mathrm{E}(X)$

(linéarité de l'espérance) donc $\mathrm{E}(V) = 2\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(U)$ c'est à dire :

$$\mathrm{E}(V) = 2\frac{1}{p} - \frac{1+2q}{1-q^2} - \frac{1}{1-q^2}$$

Exercice 10 *: Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule au hasard et, si elle est noire le jeu s'arrête, sinon, on rajoute une boule blanche. On continue ainsi jusqu'à ce que le jeu s'arrête grâce au tirage d'une boule noire. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour arrêter le jeu.*

On demande la loi de X ainsi que son éventuelle espérance.

Solution

Il est clair que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i l'événement « obtenir une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage » et N_i l'événement « obtenir une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

Pour tout entier k de $X(\Omega)$, on a donc :

$$p(X = k) = p(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k)$$

Notons C_i l'événement $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_i$

On utilise la formule des probabilités composées, ce qui donne:

$$p(X = k) = p(B_1)p(B_2 / C_1)p(B_3 / C_2)\ldots p(B_{k-1} / C_{k-2})p(N_k / C_{k-1})$$

Donc :

$$p(X = k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

C'est la loi de X.

Cherchons si X a une espérance : la série de terme général $k.p(X=k)$ ne converge pas cas c'est une série à terme positifs égaux à $\frac{1}{k+1}$ équivalents à $\frac{1}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ (et la série harmonique ne converge pas !)

Donc <u>X n'a pas d'espérance</u>.

C Problème

Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} [\cos x]^n \, dx$$

1) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$(n-1).W_{n-2} = n.W_n$

En déduire selon la parité de n, la valeur de W_n

2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $0 < W_n \leqslant W_{n-1} \leqslant W_{n-2}$.

En déduire la limite de $\frac{W_{n-1}}{W_n}$ lorsque n tend vers l'infini puis que W_n admet un équivalent de la forme $\frac{\lambda}{\sqrt{n}}$; préciser la valeur de λ.

Solution

1) On fait une intégration par parties :

$$\begin{cases} u'(x) = \cos x & u(x) = \sin x \\ v(x) = \cos^{n-1} x & v'(x) = -(n-1)\sin x\cos^{n-2} x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; on a :

$$W_n = \left[\sin x\cos^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^{n-2} x \, dx$$

Pour $n \geqslant 2$, on a $\left[\sin x\cos^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} = 0$ et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^{n-2} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)\cos^{n-2} x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^{n-2} x \, dx = W_{n-2} - W_n$$

On obtient donc :

$$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$$

C'est-à-dire, après transposition et réduction :

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

Soit d'abord $n = 2p$, où $p > 1$; on a la relation :

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p}W_{2(p-1)}$$

On montre alors par récurrence que

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{(2p)(2(p-1))\ldots(2\times 1)}W_0$$

On remarque que le dénominateur est égal à $2^p p!$; on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par

$$2^p p! = (2p)(2(p-1))\ldots(2\times 1)$$

on obtient :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}W_0$$

Par ailleurs

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Il en résulte que

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

Soit maintenant $n = 2p + 1$; on a la relation :

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}W_{2p-1}$$

On montre alors par récurrence que

$$W_{2p+1} = \frac{2p(2(p-1))\ldots(2\times 1)}{(2p+1)(2p-1)\ldots 3}W_1$$

On remarque que le numérateur est égal à $2^p p!$; on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par $2^p p! = (2p)(2(p-1))\ldots(2\times 1)$; on obtient :

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}W_1$$

On a :

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

Et donc

$$\boxed{W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

2) On montre d'abord que la suite (W_n) est strictement positive et décroissante. D'abord W_n est l'intégrale d'une fonction positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; d'après la relation de Chasles,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^n x\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$$

$$W_n \geq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^n x\, dx$$

La fonction $x \mapsto \cos^n x$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, donc

$$W_n \geq \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx$$

et donc :

$$W_n \geq \frac{\pi}{3\times 2^n} > 0$$

La suite $(\cos^n x)$ est une suite géométrique décroissante pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $0 \leq \cos x \leq 1$, donc, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$0 < W_n \leq W_{n-1} \leq W_{n-2}.$$

En divisant tout cette inégalité par W_n, on obtient :

$$1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{W_{n-2}}{W_n}$$

D'après la première question,

$$\frac{W_{n-2}}{W_n} = \frac{n}{n-1}$$

Il s'ensuit que

$$1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{n}{n-1}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n} = 1$ et donc W_n et W_{n-1} sont équivalents ; on a donc aussi

$$W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n W_{n-1}$$

Si $n = 2p$, on a successivement :

$$W_{2p}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2p-2}[(p-1)!]^2}{(2p-1)!}\frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

$$W_{2p}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{2p}{2^2 p^2}$$

$$W_{2p}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{2p}$$

soit :

$$W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}$$

Si $n = 2p + 1$, on a successivement :

$$W_{2p+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

$$W_{2p}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{2p+1}$$

soit :

$$W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}$$

W_n étant positif, il en résulte que

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$