Mathématiques

Concours HEC 99 : corrigé de l'épreuve de Maths I (voie S)

Roger Cuculière,
Professeur en classe préparatoire, lycée Pasteur (Neuilly sur Seine), collaborateur de diverses revues (Quadrature, Tangente, Repères, Sciences et Vie Junior...), co-auteur de "Olympiades internationales de Mathématiques 1988-97", Ed. du choix.

Nota : l'énoncé du sujet n'est pas reproduit ici pour des raisons d'espace éditorial. Il est disponible dans les rapports de jurys transmis par les Écoles à tous les établissements.

Partie I. Propagation déterministe

I. A. Premier modèle de propagation.

I. A. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $u_n(\Delta)$ s'écrit : $u_{n+1}(\Delta)=(1-C\Delta)u_n(\Delta)+C\Delta$. Cette suite est arithmético-géométrique. On cherche le réel α tel que $\alpha=(1-C\Delta)\alpha+C\Delta$, et l'on trouve : $\alpha=1$, et la relation de récurrence susdite s'écrit : $u_{n+1}(\Delta)-1=(1-C\Delta)(u_n(\Delta)-1)$. La suite $(u_n(\Delta)-1)$ est une suite géométrique de raison $1-C\Delta$, d'où : $u_n(\Delta)-1=(1-C\Delta)^n(u_0(\Delta)-1)$, et finalement :

$u_n(\Delta)=(1-C\Delta)^n\left(\frac{1}{N}-1\right)+1$. Conséquence : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(\Delta)=1$.

I. A. 2. a. Par définition de la partie entière, $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\le\frac{t}{\Delta}<\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1$, d'où : $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\le t<\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1\right)\Delta$, ce qui implique : $t-\Delta<\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\le t$. Il en résulte : $\lim\limits_{\Delta\to0}\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]=t$.

I. A. 2. b. Soit $n=\left[\frac{t}{\Delta}\right]$. Quand $\Delta\longrightarrow 0$, on a : $\ln\left((1-C\Delta)^n\right)=n\ln(1-C\Delta)\sim-nC\Delta=-\left[\frac{t}{\Delta}\right]C\Delta\to-Ct$. La limite de $(1-C\Delta)^n$ est donc e^{-Ct} , d'où : $\lim\limits_{\Delta\to0}u_{[t/\Delta]}(\Delta)=e^{-Ct}\left(\frac{1}{N}-1\right)+1$.

I. A. 3. La relation donnée équivaut à : $e^{Ct}f'(t)+e^{Ct}Cf(t)=Ce^{Ct}$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. La somme $e^{Ct}f'(t)+e^{Ct}Cf(t)$ est la dérivée de $g(t)=e^{Ct}f(t)$, et la relation précédente s'écrit : $g'(t)=Ce^{Ct}$, d'où : $g(t)=e^{Ct}+K$, où K est une constante. Par suite, $f(t)=e^{-Ct}g(t)=1+Ke^{-Ct}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t=0$, ce qui donne : $\frac{1}{N}=f(0)=1+K$, d'où : $K=\frac{1}{N}-1$, et finalement : $f(t)=1+e^{-Ct}\left(\frac{1}{N}-1\right)$. C'est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.

I. B. Deuxième modèle de propagation.

I. B. 1. La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit : $v_{n+1}(\Delta) = (1+C\Delta)v_n(\Delta) - C\Delta v_n(\Delta)^2$, soit :

$v_{n+1}(\Delta) = \varphi(v_n(\Delta))$, où : $\varphi(x) = (1+C\Delta)x - C\Delta x^2$. Pour $x \leq 1$, on a : $\varphi'(x) = (1+C\Delta) - 2C\Delta x \geq 1 - C\Delta > 0$, ce qui prouve que la fonction φ est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$.

On a : $v_1(\Delta) = (1+C\Delta)\frac{1}{N} - C\Delta\frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} + C\Delta\left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N} > \frac{1}{N} = v_0(\Delta)$, et :

$v_1(\Delta) = \varphi(v_0(\Delta)) = \varphi\left(\frac{1}{N}\right) < \varphi(1) = 1$. Ainsi, la relation : $v_n(\Delta) < v_{n+1}(\Delta) < 1$ est vraie pour $n = 0$.

Si cette relation est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors la croissance de la fonction φ conduit à : $\varphi(v_n(\Delta)) < \varphi(v_{n+1}(\Delta)) < \varphi(1)$, soit : $v_{n+1}(\Delta) < v_{n+2}(\Delta) < 1$. Ceci démontre par récurrence que l'on a : $v_n(\Delta) < v_{n+1}(\Delta) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(v_n(\Delta))$ est donc strictement croissante, ce qui prouve que $v_n(\Delta) \geq v_0(\Delta) = \frac{1}{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il en résulte que la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1\right[$. Etant croissante et majorée, cette suite admet une limite L telle que : $\frac{1}{N} \leq L \leq 1$.

Cette limite vérifie de plus : $\varphi(L) = L$, soit : $L = 0$ ou $L = 1$. Comme $\frac{1}{N} \leq L \leq 1$, la seule valeur possible de L est : $L = 1$.

Il est ainsi démontré que la suite $(v_n(\Delta))$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1\right[$, est strictement croissante, et a pour limite 1.

I. B. 2. a. • La relation de récurrence qui régit la suite $(v_n(\Delta))$ s'écrit :

$1 - v_{n+1}(\Delta) = 1 - v_n(\Delta) - C\Delta v_n(\Delta) + C\Delta v_n(\Delta)^2 = (1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta))$. Comme $v_n(\Delta) \geq \frac{1}{N}$, on a :

$1 - C\Delta v_n(\Delta) \leq 1 - \frac{C\Delta}{N}$, et comme $v_n(\Delta) < 1$, on a finalement :

$(1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta)) \leq (1 - v_n(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)$, soit : $1 - v_{n+1}(\Delta) \leq (1 - v_n(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)$.

• L'inégalité précédente implique : $1 - v_n(\Delta) \leq (1 - v_0(\Delta))\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$, soit : $0 < 1 - v_n(\Delta) \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$.

Comme $0 < C\Delta < 1$ et que $N \geq 4$, il est clair que : $0 < 1 - \frac{C\Delta}{N} < 1$. La série de terme général $\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right)^n$ est une série géométrique convergente, et la série de terme général $1 - v_n(\Delta)$ est donc convergente elle aussi.

I. B. 2. b. La définition : $x_n = \frac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}$ implique : $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - v_{n+1}(\Delta)}{1 - v_n(\Delta)} \cdot \frac{1}{1 - C\Delta}$.

La relation : $1 - v_{n+1}(\Delta) = (1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta v_n(\Delta))$ trouvée en I. B. 2. a. conduit alors à :

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - C\Delta v_n(\Delta)}{1 - C\Delta} = 1 + \frac{C\Delta(1 - v_n(\Delta))}{1 - C\Delta}$. On sait que $1 - v_n(\Delta) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Il en résulte :

$\ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln\left(1 + \frac{C\Delta(1 - v_n(\Delta))}{1 - C\Delta}\right) \sim \frac{C\Delta}{1 - C\Delta}(1 - v_n(\Delta))$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Les séries de termes généraux : $\dfrac{C\Delta}{1-C\Delta}\left(1-v_n(\Delta)\right)$ et : $\ln x_{n+1}-\ln x_n$ sont deux séries à termes généraux positifs équivalents : elles sont donc de même nature, et la série de terme général $\ln x_{n+1}-\ln x_n$ est donc convergente.

I. B. 2. c. On a : $\ln x_n-\ln x_0=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\ln x_{k+1}-\ln x_k\right)$, qui a pour limite s quand $n\longrightarrow+\infty$. Il en résulte que la limite de $\ln x_n$ est : $s+\ln x_0=s+\ln\left(1-\dfrac{1}{N}\right)$. La limite de x_n est donc : $\exp\left(s+\ln\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\right)=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)e^s$, qui est un réel strictement positif. En conséquence : $1-v_n(\Delta)=x_n(1-C\Delta)^n\sim\left(1-\dfrac{1}{N}\right)e^s(1-C\Delta)^n$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

I. B. 3. a. On pose : $y_n=\dfrac{v_n(\Delta)}{\left(1-v_n(\Delta)\right)(1+C\Delta)^n}$. Il vient : $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=\dfrac{v_{n+1}(\Delta)}{1-v_{n+1}(\Delta)}.\dfrac{1-v_n(\Delta)}{v_n(\Delta)}.\dfrac{1}{1+C\Delta}$.

Nous avons vu que : $v_{n+1}(\Delta)=v_n(\Delta)\left(1+C\Delta-C\Delta v_n(\Delta)\right)$ et que : $1-v_{n+1}(\Delta)=\left(1-v_n(\Delta)\right)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)$.

Il en résulte : $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=\dfrac{1+C\Delta-C\Delta v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}.\dfrac{1}{1+C\Delta}$, d'où : $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}-1=\dfrac{1+C\Delta-C\Delta v_n(\Delta)-\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)(1+C\Delta)}{\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)(1+C\Delta)}$

Le numérateur se simplifie et apparaît égal à : $C^2\Delta^2 v_n(\Delta)$, en sorte que :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=1+\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)}.$$

I. B. 3. b. • La fonction : $u\mapsto\ln(1+u)$, définie pour $u>-1$, a pour dérivée seconde $\dfrac{-1}{(u+1)^2}$. Cette fonction est donc concave, ce qui implique que son graphe est situé au-dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente à l'origine, dont l'équation est : $y=u$. Il en résulte : $\ln(1+u)\le u$ pour tout pour $u>-1$.

Si l'on ne veut pas utiliser la convexité, on peut étudier la fonction auxiliaire : $\varphi(u)=u-\ln(1+u)$.

• Cette inégalité : $\ln(1+u)\le u$, appliquée au résultat de la question I. 3. B. a., conduit à :

$$\ln y_{n+1}-\ln y_n=\ln\frac{y_{n+1}}{y_n}=\ln\left(1+\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)}\right)\le\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+C\Delta)\left(1-C\Delta v_n(\Delta)\right)}\le\frac{C^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}.$$

Puisque $v_n(\Delta)<1$, on a : $\dfrac{v_n(\Delta)}{1-C\Delta v_n(\Delta)}<\dfrac{1}{1-C\Delta}$, d'où : $\ln y_{n+1}-\ln y_n\le\dfrac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

En conséquence : $\ln\dfrac{y_q}{y_0}=\ln y_q-\ln y_0=\sum_{n=0}^{q-1}\left(\ln y_{n+1}-\ln y_n\right)\le q\dfrac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

Par ailleurs, il est clair que $y_0=\dfrac{v_0(\Delta)}{1-v_q(\Delta)}=\dfrac{1}{N-1}$, d'où : $\dfrac{y_q}{y_0}=\dfrac{(N-1)v_q(\Delta)}{\left(1-v_q(\Delta)\right)(1+C\Delta)^q}$.

On a ainsi démontré que : $\ln\left(\dfrac{(N-1)v_q(\Delta)}{\left(1-v_q(\Delta)\right)(1+C\Delta)^q}\right)\le q\dfrac{C^2\Delta^2}{1-C\Delta}$.

I. B. 3. c. L'expression de $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ trouvée en I. B. 3. a. montre que $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}>1$, ce qui signifie que la suite (y_n) est croissante, d'où l'on déduit : $\frac{y_q}{y_0} > 1$. Le résultat de I. B. 3. c. se précise donc ainsi :

$$0 < \ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q}\right) \leq \Delta \frac{C^2 q\Delta}{1-C\Delta}.$$

Soit $q = \left[\frac{t}{\Delta}\right]$. On sait que la limite de $q\Delta$, quand $\Delta \longrightarrow 0$, est t (question I. A. 2. a.). L'encadrement précédent permet donc

d'affirmer : $\lim_{\Delta\to 0} \ln\left(\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q}\right) = 0$, d'où : $\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+C\Delta)^q} = 1 + o(1)$.

On démontre comme en I. A. 2. b. que la limite de $(1+C\Delta)^q$, quand $\Delta \longrightarrow 0$, est e^{Ct}, d'où :

$\frac{(N-1)v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)} = (1+o(1))(e^{Ct}+o(1)) = e^{Ct}+o(1)$. En conséquence, la limite de $\frac{v_q(\Delta)}{1-v_q(\Delta)}$ est : $\frac{e^{Ct}}{N-1}$, la limite de $\frac{1-v_q(\Delta)}{v_q(\Delta)}$

est : $(N-1)e^{-Ct}$, la limite de $\frac{1}{v_q(\Delta)}$ est : $1+(N-1)e^{-Ct}$, et enfin :

$$\lim_{\Delta\to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta) = \frac{1}{1+e^{-Ct}(N-1)}.$$

I. B. 4. La relation donnée équivaut à : $\frac{h'(t)}{h(t)^2} = C\left(\frac{1}{h(t)} - 1\right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto -\frac{h'(t)}{h(t)^2}$ est la dérivée de

$H(t) = \frac{1}{h(t)}$, et la relation précédente s'écrit : $H'(t) = C(1-H(t))$, et cette fonction $H(t)$ satisfait à la même relation que la fonction $f(t)$ de la question I. A. 3. . On en déduit immédiatement :

$H(t) = 1 + Ke^{-Ct}$, où K est une constante, donc : $h(t) = \frac{1}{1+Ke^{-Ct}}$. La valeur de K s'obtient en faisant $t = 0$, ce qui donne :

$\frac{1}{N} = h(0) = \frac{1}{1+K}$, d'où : $K = N-1$, et finalement : $h(t) = \frac{1}{1+(N-1)e^{-Ct}}$. C'est la valeur de la limite trouvée à la question précédente.

Partie II. Propagation probabiliste

II. A. Une formule dans le cas discret.

II. A. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,\ldots,N-1\}$. A l'instant $(n+1)\Delta$, il reste exactement r personnes non informées si et seulement si :

- ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement $r+1$ personnes non informées *et* une de ces personnes est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta,(n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-(r+1))$.

- ou bien : à l'instant $n\Delta$, il reste exactement r personnes non informées *et* aucune personne supplémentaire n'est informée dans l'intervalle de temps $[n\Delta,(n+1)\Delta]$; la probabilité de cet événement est :

$P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r))$.

La formule des probabilités totales se traduit donc par l'égalité :

$P_{n+1}(\Delta,r) = P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-(r+1)) + P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r))$, ce qui est la formule demandée.

II. B. Étude d'un premier cas discret.

II. B. 1. La formule trouvée en II. A., appliquée à $N = 4$ et $\Delta = 1$, donne, pour $r = 0, 1, 2, 3$:

$P_{n+1}(1,0) = P_n(1,0) + 3\beta P_n(1,1)$, $P_{n+1}(1,1) = (1-3\beta)P_n(1,1) + 4\beta P_n(1,2)$, $P_{n+1}(1,2) = (1-4\beta)P_n(1,2) + 3\beta P_n(1,3)$,

$P_{n+1}(1,3) = (1-3\beta)P_n(1,3)$. Ces égalités se traduisent matriciellement par : $U_{n+1} = TU_n$, avec :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}$$. Cette matrice dénommée T est Triangulaire...

II. B. 2. a. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux, soit : 1, $1-4\beta$, $1-3\beta$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & -3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & -4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, ce qui donne immédiatement : $y = z = t = 0$, et le sous-espace propre correspondant est

la droite vectorielle engendrée par le vecteur : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On trouve de même que le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $1-4\beta$ est la droite vectorielle engendrée par le

vecteur : $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Et enfin, le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $1-3\beta$ est la droite vectorielle engen-

drée par le vecteur : $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il n'existe donc pas de base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres de la matrice T : cette matrice n'est pas diagonalisable.

II. B. 2. b. Le système : $T\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (1-3\beta)\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ s'écrit : $3\beta y = 1$, $-\beta y + 4\beta z = -1$, $-\beta z + 3\beta t = 0$, qui se résout immé-

diatement en : $y = \dfrac{1}{3\beta}$, $z = \dfrac{1}{6\beta}$, $t = \dfrac{1}{18\beta}$.

II. B. 2. c. Désignons par V_4 le vecteur : $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(3\beta) \\ 1/(6\beta) \\ 1/(18\beta) \end{pmatrix}$ trouvé à la question précédente (II. B. 2. b.), qui vérifie :

$TV_4 = (1-3\beta)V_4 + V_3$. Sa quatrième coordonnée n'étant pas nulle, ce vecteur n'est pas combinaison linéaire de V_1, V_2, V_3. La famille (V_1, V_2, V_3) est constituée de trois vecteurs propres correspondant à trois valeurs propres distinctes : cette famille est donc libre, et comme $V_4 \notin \mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3)$, la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est libre aussi, et c'est donc une *base* de $\mathbb{R}^4$.

On a : $TV_1 = V_1$, $TV_2 = (1-4\beta)V_2$, $TV_3 = (1-3\beta)V_3$, $TV_4 = V_3 + (1-3\beta)V_4$.

Dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4), la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à T est donc :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canonique à la base (V_1, V_2, V_3, V_4) est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1/(3\beta) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(6\beta) \\ 0 & 0 & 0 & 1/(18\beta) \end{pmatrix}$.

On a donc : $S = P^{-1}TP$, d'où : $T = PSP^{-1}$.

II. B. 2. d. Posons : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices vérifient : $S = D + N$,

$N^2 = 0$, $DN = ND = (1-3\beta)N$. Puisque $DN = ND$, on peut calculer S^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au moyen de la formule du binôme de Newton : $S^n = (D+N)^n = D^n + C_n^1 D^{n-1}N = D^n + n(1-3\beta)^{n-1}N$, soit :

$$S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4\beta)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-3\beta)^n & n(1-3\beta)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & (1-3\beta)^n \end{pmatrix}.$$

II. B. 3. Puisque $0 < \beta < \dfrac{1}{4}$, il est clair que : $0 < 1-4\beta < 1-3\beta < 1$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice que nous désignerons par S_∞. En conséquence, la matrice $T^n = PS^nP^{-1}$ admet une limite égale à : $T_\infty = PS_\infty P^{-1}$. Le calcul montre que : $PS_\infty = S_\infty$, d'où :

$$T_\infty = PS_\infty P^{-1} = S_\infty P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II. B. 4. La somme des coefficients de chaque colonne de la matrice T est égale à 1 (c'est une matrice *stochastique*). Il en résulte que : $LT = L$. On en déduit immédiatement que $LT^n = L$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où : $\lim_{n\to+\infty} LT^n = L = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Mais par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} LT^n = LT_\infty = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c & d\end{pmatrix}$, d'où :

$\begin{pmatrix}a & b & c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, et finalement : $T_\infty = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

II. B. 5. La limite de $U_n = T^n U_0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, est : $T_\infty U_0 = T_\infty \begin{pmatrix}P_0(1,0)\\ P_0(1,1)\\ P_0(1,2)\\ P_0(1,3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Comme $U_n = \begin{pmatrix}P_n(1,0)\\ P_n(1,1)\\ P_n(1,2)\\ P_n(1,3)\end{pmatrix}$, ceci se traduit par : $\lim_{n\to+\infty} P_n(1,0) = 1$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(1,1) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(1,2) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(1,3) = 0$.

II. C. Étude du cas discret général.

II. C. 1. Pour $i \in \{1,2,\ldots,N\}$, notons $(W_n)_i$ la i-ème coordonnée du vecteur W_n, en sorte que : $(W_n)_i = P_n(\Delta, i-1)$. La formule de la question II. A. se traduit par :

$$(W_{n+1})_i = P_{n+1}(\Delta, i-1) = P_n(\Delta, i-1)\big(1-\beta\Delta(i-1)(N-i+1)\big) + P_n(\Delta, i)\beta\Delta i(N-i)$$

$= \big(1-\beta\Delta(i-1)(N-i+1)\big)(W_n)_i + \beta\Delta i(N-i)(W_n)_{i+1}$, pour $i \in \{1,2,\ldots,N-1\}$, et bien sûr :

$(W_{n+1})_N = \big(1-\beta\Delta(N-1)\big)(W_{n+1})_N$.

Notons $(R)_{ij}$ le coefficient de la i-ème ligne, j-ème colonne d'une matrice R à N lignes et N colonnes.

L'égalité : $W_{n+1} = RW_n$ se traduit par : $(W_{n+1})_i = \sum_{j=1}^{N} (R)_{ij}(W_n)_j$.

L'égalité précédente est bien de ce type, avec : $(R)_{i,i} = 1-\beta\Delta(i-1)(N-i+1)$, $(R)_{i,i+1} = \beta\Delta i(N-i)$, et $(R)_{ij} = 0$ dans les autres cas. On trouve une matrice R qui est une généralisation de la matrice T de la question II. B. 1. : une matrice triangulaire supérieure constituée de la diagonale principale et de la surdiagonale des coefficients $(R)_{i,i+1}$, tous les autres coefficients étant nuls.

II. C. 2. a. La procédure **`Calcul1`** consiste à écrire le calcul matriciel que nous venons de présenter :

```
(************************************************************************)
PROCEDURE Calcul1(Var V : vecteur) ;

VAR j : integer ;

BEGIN

  for j:=1 to N-1 do
    V[j]:=(1-beta*delta*(j-1)*(N-j+1))*V[j] + beta*delta*j*(N-j)*V[j+1] ;

    V[N]:=(1-beta*delta*(N-1))*V[N]

END ;
(************************************************************************)
```

II. C. 2. b. La procédure **`Calcul2`** consiste à initialiser convenablement le vecteur **`V`**, puis à lui faire subir **`i`** fois la procédure **`Calcul1`** :

```
(************************************************************************)
PROCEDURE Calcul2(Var V : vecteur ; i : integer) ;

VAR k : integer ;

BEGIN
  for k:=1 to N-1 do V[k]:=0 ; V[N]:=1 ;
  for k:= 1 to i do Calcul1(V)

END ;
(************************************************************************)
```

II. C. 3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $r = N-1$, la formule de la partie II. A. devient :

$P_{n+1}(\Delta, N-1) = P_n(\Delta, N-1)(1-\beta\Delta(N-1)) = \rho P_n(\Delta, N-1)$,

ce qui prouve que la suite $(P_n(\Delta, N-1))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison ρ. Il en résulte immédiatement :

$P_n(\Delta, N-1) = \rho^n P_0(\Delta, N-1) = \rho^n$.

II. C. 4. a. La condition vérifiée par la suite v_n s'écrit : $\dfrac{v_{n+1}}{q^{n+1}} \le \dfrac{a}{q}.\dfrac{v_n}{q^n} + \dfrac{b}{q}$, ce qui fait songer aux suites arithmético-géométriques. S'il existe un réel α tel que : $\alpha = \dfrac{a}{q}\alpha + \dfrac{b}{q}$, alors la soustraction de cette égalité à l'inégalité précédente conduit à : $\dfrac{v_{n+1}}{q^{n+1}} - \alpha \le \dfrac{a}{q}\left(\dfrac{v_n}{q^n} - \alpha\right)$, d'où : $\dfrac{v_n}{q^n} - \alpha \le \left(\dfrac{a}{q}\right)^n (v_0 - \alpha)$, et finalement :

$\dfrac{v_n}{q^n} \le \alpha + \left(\dfrac{a}{q}\right)^n (v_0 - \alpha) \le \alpha + \left(\dfrac{a}{q}\right)^n |v_0 - \alpha| \le \alpha + |v_0 - \alpha|$. Si nous posons : $A = \alpha + |v_0 - \alpha|$, nous obtenons l'inégalité demandée : $v_n \le Aq^n$.

Il reste à préciser que le réel α existe bel et bien ; il est égal à : $\alpha = \dfrac{b}{q-a}$.

II. C. 4. b. La condition vérifiée par la suite v_n s'écrit : $\dfrac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \dfrac{u_n}{a^n} + \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{q}{a}\right)^n$, soit : $\dfrac{u_{n+1}}{a^{n+1}} - \dfrac{u_n}{a^n} = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{q}{a}\right)^n$, suite *géométrique*, dont la somme est :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{a^{k+1}}-\frac{u_k}{a^k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b}{a}\left(\frac{q}{a}\right)^k=\frac{b}{a}\cdot\frac{\left(\frac{q}{a}\right)^k-1}{\frac{q}{a}-1}=\frac{b}{a^n}\cdot\frac{q^n-a^n}{q-a}.$$

Mais par ailleurs, cette somme est *télescopique* :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{a^{k+1}}-\frac{u_k}{a^k}\right)=\left(\frac{u_n}{a^n}-\frac{u_{n-1}}{a^{n-1}}\right)+\left(\frac{u_{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{u_{n-2}}{a^{n-2}}\right)+......+\left(\frac{u_2}{a^2}-\frac{u_1}{a}\right)+\left(\frac{u_1}{a}-u_0\right)=\frac{u_n}{a^n}-u_0.$$

En identifiant les deux expressions trouvées pour cette somme, il vient :

$$u_n=b\frac{q^n-a^n}{q-a}+u_0a^n.$$

II. C. 4. c. La fonction $\phi : x \mapsto x(N-x)$ a pour dérivée : $N-2x$. Elle est donc strictement croissante sur $\left[0,\frac{N}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{N}{2},N\right]$. Cette fonction admet donc un maximum pour $x=\frac{N}{2}$, ce qui permet d'affirmer que pour tout $x\in[0,N]$, on a : $\phi(x)=x(N-x)\leq\frac{N}{2}\cdot\frac{N}{2}=\frac{N^2}{4}$. En fait, cette inégalité est vraie de tout x réel, et elle découle immédiatement de l'identité remarquable : $\frac{N^2}{4}-x(N-x)=\left(\frac{N}{2}-x\right)^2$.

II. C. 5. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $r=N-2$, la formule de la partie II. A. devient :

$$P_{n+1}(\Delta,N-2)=P_n(\Delta,N-1)(1-2\beta\Delta(N-2))+P_n(\Delta,N-1)\beta\Delta(N-1),$$

et comme on a vu à la question II. C. 3. que : $P_n(\Delta,N-1)=\rho^nP_0(\Delta,N-1)=\rho^n$, il vient :

$$P_{n+1}(\Delta,N-2)=P_n(\Delta,N-1)(1-2\beta\Delta(N-2))+\beta\Delta(N-1)\rho^n,$$

ce qui est exactement une formule de récurrence du type étudié (et " dévissé ") à la question II. C. 4. b. , avec $a=1-2\beta\Delta(N-2)$, $b=\beta\Delta(N-1)$, $q=\rho=1-\beta\Delta(N-1)$.

La question II. C. 4. c. nous assure que $a\neq q$, ce qui est aisé à vérifier directement puisque l'égalité : $a=q$ équivaudrait à : $2\beta\Delta(N-2)=\beta\Delta(N-1)$, soit : $N=3$, ce qui est exclu par l'énoncé.

La conclusion de la question II. C. 4. b. nous donne immédiatement :

$$P_n(\Delta,N-2)=\beta\Delta(N-1)\frac{\rho^n-(1-2\beta\Delta(N-2))^n}{\beta\Delta(N-3)}+P_0(\Delta,N-2)a^n,\text{ soit :}$$

$$P_n(\Delta,N-2)=\frac{N-1}{N-3}\left(\rho^n-(1-2\beta\Delta(N-2))^n\right),\text{ où : }\rho=1-\beta\Delta(N-1).$$

II. C. 6. On va démontrer par récurrence sur k que pour chaque $k\in\{2,3,\dots N-2\}$, il existe un réel positif B_k tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $P_n(\Delta,N-k)=B_k\rho^n$. Cette propriété est vraie pour $k=2$, puisque nous avons vu que :

$$P_n(\Delta,N-2)=\frac{N-1}{N-3}\left(\rho^n-(1-2\beta\Delta(N-2))^n\right)\leq\frac{N-1}{N-3}\rho^n.$$

Supposons que cette propriété soit vraie pour un $k\in\{2,3,\dots N-3\}$.

Rappelons la formule de la question II. A. :

$$P_{n+1}(\Delta,r)=P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r))+P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-r-1).$$

L'étude faite à la question II. C. 4. c. de la fonction $\phi : x\mapsto x(N-x)$ sur l'intervalle $[0,N]$ permet d'affirmer que si : $2\leq r\leq N-2$, alors : $r(N-r)=\phi(r)\geq\phi(2)=\phi(N-2)=2(N-2)>\phi(1)=N-1$, et en conséquence :

$1-\beta\Delta r(N-r)\leq 1-2\beta\Delta(N-2)<1-\beta\Delta(N-1)=\rho$. On a vu de plus que : $\phi(x)\leq\frac{N^2}{4}$, d'où : $(r+1)(N-r-1)\leq\frac{N^2}{4}$.

Il en résulte : $P_{n+1}(\Delta,r)\leq\left(1-2\beta\Delta(N-2)\right)P_n(\Delta,r)+\beta\Delta\frac{N^2}{4}P_n(\Delta,r+1)$, autrement dit :

$$P_{n+1}(\Delta,N-k-1)\leq\left(1-2\beta\Delta(N-2)\right)P_n(\Delta,N-k-1)+\beta\Delta\frac{N^2}{4}P_n(\Delta,N-k).$$

Et en appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$P_{n+1}(\Delta,N-k-1)\leq\left(1-2\beta\Delta(N-2)\right)P_n(\Delta,N-k-1)+\beta\Delta\frac{N^2}{4}B_k\rho^n.$$

Cette inégalité est du type étudié à la question II. C. 4. b., et les conditions associées sont réalisées ici.
Il en résulte qu'il existe B_{k+1} tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $P_n(\Delta,N-k-1)=B_{k+1}\rho^n$.
La propriété annoncée est ainsi démontrée par récurrence, et en posant : $A_r=B_{N-r}$, on obtient la propriété demandée pour $r\in\{2,3,\ldots N-2\}$. Pour $r=N-1$, on a vu à la question II. C. 3. que : $P_n(\Delta,N-1)=\rho^n$, et la propriété est encore vraie.

II. C. 7. a. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $r=0$, la formule de la partie II. A. devient :
$P_{n+1}(\Delta,0)=P_n(\Delta,0)+P_n(\Delta,1)\beta\Delta(N-1)$,
et cette égalité montre que la suite $\left(P_n(\Delta,0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante*. Or, cette suite est majorée par 1, puisque $P_n(\Delta,0)$ est une probabilité. Il s'ensuit que la suite $\left(P_n(\Delta,0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L telle que : $0\leq L\leq 1$.

II. C. 7. b. • L'égalité : $P_{n+1}(\Delta,0)=P_n(\Delta,0)+P_n(\Delta,1)\beta\Delta(N-1)$ équivaut à : $P_n(\Delta,1)=\frac{P_{n+1}(\Delta,0)-P_n(\Delta,0)}{\beta\Delta(N-1)}$, et comme la suite $\left(P_n(\Delta,0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, cette égalité implique : $\lim_{n\to+\infty}P_n(\Delta,1)=0$.

• A la question II. C. 6., nous avons vu que pour chaque pour chaque $r\in\{2,3,\ldots N-1\}$, il existe un réel positif A_r tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $P_n(\Delta,r)=A_r\rho^n$. Puisque $0<\rho<1$, il en résulte :
$\lim_{n\to+\infty}P_n(\Delta,r)=0$.

• Le nombre de personnes non informées à l'instant $n\Delta$ est : ou bien 0, ou bien 1, ... , ou bien $N-1$; ces N événements, qui sont deux à deux incompatibles, forment un système complet, d'où : $\sum_{r=0}^{N-1}P_n(\Delta,r)=1$, et par suite :

$P_n(\Delta,0)=1-\sum_{r=1}^{N-1}P_n(\Delta,r)$. Ce qui implique : $\lim_{n\to+\infty}P_n(\Delta,0)=1$.

II. C. 8. • On a vu à la question II. C. 3. que : $P_n(\Delta,N-1)=\left(1-\beta\Delta(N-1)\right)^n$. Si $n=\left[\frac{t}{\Delta}\right]$, alors : $\frac{t}{\Delta}-1<n\leq\frac{t}{\Delta}$, d'où :

$$\left(\frac{t}{\Delta}-1\right)\ln\left(1-\beta\Delta(N-1)\right)\geq\ln P_n(\Delta,N-1)\geq\frac{t}{\Delta}\ln\left(1-\beta\Delta(N-1)\right).$$

On a : $\frac{t}{\Delta}\ln\left(1-\beta\Delta(N-1)\right)\sim-\beta(N-1)t$ quand $\Delta\to 0$, et $\left(\frac{t}{\Delta}-1\right)\ln\left(1-\beta\Delta(N-1)\right)$ a la même limite. En conséquence,

$$\lim_{\Delta\to 0}\ln P_{[t/\Delta]}(\Delta,N-1)=e^{-\beta(N-1)t}.$$

• On a vu à la question II. C. 5. que : $P_n(\Delta,N-2)=\frac{N-1}{N-3}\left(\left(1-\beta\Delta(N-1)\right)^n-\left(1-2\beta\Delta(N-2)\right)^n\right)$. Soit encore $n=\left[\frac{t}{\Delta}\right]$.

Le même encadrement que précédemment montre que : $\lim_{\Delta\to 0}\left(1-\beta\Delta(N-1)\right)^{[t/\Delta]} = e^{-\beta(N-1)t}$, et :

$\lim_{\Delta\to 0}\left(1-2\beta\Delta(N-2)\right)^{[t/\Delta]} = e^{-2\beta(N-2)t}$. D'où l'on déduit enfin :

$$\lim_{\Delta\to 0}\ln P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-1) = \frac{N-1}{N-3}\left(e^{-\beta(N-1)t} - e^{-2\beta(N-2)t}\right).$$

38

II. D. Étude du cas continu.

II. D. 1. La fonction f vérifie, pour tout $t \in I$: $e^{at} f'(t) = -ae^{at} f(t) + be^{(a-q)t}$, soit :

$\frac{d}{dt}\left(e^{at} f(t)\right) = be^{(a-q)t}$. On en déduit : $e^{at} f(t) = b\frac{e^{(a-q)t}}{a-q} + K$, où K est une constante réelle. La fonction f est donc de la forme : $f(t) = \frac{b}{a-q}e^{-qt} + Ke^{-at}$.

II. D. 2. • La fonction F_{N-1} vérifie la propriété : $F'_{N-1}(t) = -\beta(N-1)F_{N-1}(t)$. D'après la question II. D. 1., cette fonction est donc de la forme : $F_{N-1}(t) = Ke^{-\beta(N-1)t}$. La condition supplémentaire : $F_{N-1}(0) = 1$ implique : $K = 1$, et finalement :

$F_{N-1}(t) = e^{-\beta(N-1)t}$.

• La fonction F_{N-2} vérifie la propriété : $F'_{N-2}(t) = \beta(N-1)F_{N-1}(t) - 2\beta(N-2)F_{N-2}(t)$, soit :

$F'_{N-2}(t) = \beta(N-1)e^{-\beta(N-1)t} - 2\beta(N-2)F_{N-2}(t)$.

D'après la question II. D. 1., cette fonction est donc de la forme :

$$F_{N-2}(t) = \frac{\beta(N-1)}{2\beta(N-2)-\beta(N-1)}e^{-\beta(N-1)t} + Ke^{-2\beta(N-2)t} = \frac{N-1}{N-3}e^{-\beta(N-1)t} + Ke^{-2\beta(N-2)t}.$$

La condition supplémentaire : $F_{N-2}(0) = 0$ implique : $K = -\frac{N-1}{N-3}$, et finalement :

$$F_{N-2}(t) = \frac{N-1}{N-3}\left(e^{-\beta(N-1)t} - e^{-2\beta(N-2)t}\right).$$

• On retrouve les valeurs limites obtenues à la question II. C. 8.

Commentaire

Un problème des plus intéressants, avec un thème unique : la propagation de l'information dans une population. Pour traiter ce thème, le problème met en œuvre les divers outils mathématiques du programme : Analyse, Algèbre linéaire, Calcul des Probabilités, sans oublier des questions d'informatique.

En raison du sujet choisi, cet énoncé fait beaucoup de place aux suites. Il a le mérite de proposer des techniques de majoration et d'encadrement qui mettent en lumière la finesse de l'Analyse mathématique, laquelle ne se réduit pas, et loin s'en faut, à l'application automatique de formules apprises par cœur.

On a pu regretter une certaine lourdeur de notations dans la partie I. Dans les questions où Δ reste fixe, on aurait pu noter u_n ce que l'énoncé notait $u_n(\Delta)$: on obtenait ainsi des calculs plus simples. Rien n'empêchait les candidats de faire preuve d'initiative et de conduire leurs calculs en dénommant provisoirement u_n la suite en question, en signalant explicitement cette modification sur la copie. Ou bien de faire comme l'auteur de ces lignes : de procéder à cette modification *au brouillon*, en rétablissant sur la copie la notation de l'énoncé.

L'auteur de l'énoncé s'est sans doute refusé à cette simplification pour préserver une unité de notation, et la notation $u_n(\Delta)$ était indispensable dans les questions où Δ tend vers 0. Ces questions sont du plus haut intérêt par le lien qu'elles établissent entre le cas discret et le cas continu.

Un problème de concours n'est pas seulement une juxtaposition de questions testant des connaissances, il doit être aussi un aussi un travail mathématique cohérent qui apporte quelque chose sur le plan scientifique, et l'on peut dire que ce but est atteint ici.

R. C.