Maths en vacances

François Delaplace, Pierre Girard
Professeurs de Mathématiques, lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles)

En cette fin d'année comparable à toutes les autres, le professeur reçoit ses étudiants afin de faire un bilan de l'année écoulée.

– J'ai suivi vos conseils, j'ai acheté des livres pour m'entraîner, j'ai même suivi un stage, mais je n'arrive toujours pas à retenir l'essentiel. Lorsque je dois traiter une question, j'ai du mal à voir le théorème ou la propriété à utiliser. Qu'est-ce que je peux faire de plus ?

Le professeur connaît bien ce cas ; depuis qu'il enseigne, il en a rencontré beaucoup confrontés au même problème :

Pour mettre le cours en pratique, il faut le connaître et donc l'apprendre, mais pour l'apprendre (et le retenir) il faut “voir où l'on va”, et donc... l'utiliser.

Comment sortir de cette boucle ?

– Il ne faut pas distinguer les deux choses, apprendre le cours et le mettre en pratique, finit-il par dire ; ces deux choses n'en font qu'une.

– Concrètement, que puis-je faire, reprit l'étudiant ; je me demandais s'il ne faudrait pas m'avancer dans le programme de seconde année afin d'avoir un certain recul...

– Non, coupa le professeur, on a fait beaucoup de choses cette année. Il convient, pendant les vacances de laisser se mettre en place les connaissances et les méthodes. Inutile d'en faire plus.

– Alors vous préconisez un repos absolu ?

– Ce n'est pas ce que j'ai dit. Je vous invite seulement à ne pas commencer le programme de seconde année. Les thèmes abordés reposent sur ceux de cette année. Faire l'étude d'une notion nouvelle sans avoir les acquis, c'est prendre le risque de ne rien comprendre ou celui de comprendre tout de travers.

Mais je ne vous invite pas pour autant à ne rien faire. Si vous désirez avoir une certaine aisance pour assimiler les notions du programme de seconde année, et je ne doute pas que ce soit aujourd'hui votre intention, je vous conseille de fortifier vos acquis pendant ces vacances.

– Comment?

– D'abord, ne rien faire, jusqu'à la mi-juillet peut-être. Ensuite, je vais vous donner une liste d'exercices portant sur des points variés du programme : suites, polynômes, fonctions équations, probabilités et Pascal.

Vous devrez d'abord, (re)faire des fiches de cours sur chacun de ces points : définitions, propriétés avec référence à des cas d'utilisations...

Faire les exercices que je vous propose. Une règle à respecter : ne pas regarder la solution d'un exercice avant de l'avoir cherché.

Maintenant, bonnes vacances ; vos succès l'an prochain dépendent beaucoup de ce que vous ferez cet été.

F. D. - P. G.

Exercice1 *Soit*

$$(u_n): u_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } u_1 = 1$$

1. Expliquer pourquoi cette suite n'est pas géométrique.

2. Calculer u_n en fonction de n.

Solution

1. La suite $(u_n): u_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n$ est bien de la forme $u_{n+1} = qu_n$, mais le réel q n'est pas une constante, c'est-à-dire un réel ou une expression indépendante de la variable n.

   Par exemple, la suite $(v_n): v_{n+1} = \frac{a}{a+1}v_n$ est une suite géométrique car le coefficient multiplicateur q est le rapport $\frac{a}{a-1}$ et est indépendant de n.

2. Impossible d'utiliser une formule du cours des suites géométriques puisque cette suite n'en est pas une. Il ne reste plus qu'à *chercher* la relation, la *conjecturer* et la *démontrer*. On a successivement :

   $$u_1 = 1 \qquad u_2 = \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_3 = \frac{2}{3}u_2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

   $$u_4 = \frac{3}{4}u_3 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \qquad u_5 = \frac{4}{5}u_4 = \frac{4}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

   Il semblerait que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

   $$u_n = \frac{1}{n}$$

   Démontrons cette relation par récurrence. Elle est vraie pour $n = 1$; supposons que pour un n quelconque fixé, $u_n = \frac{1}{n}$; on doit en déduire que $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

   On a :

   $$u_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n \qquad u_{n+1} = \frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n} \qquad \text{et donc } u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

   Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{1}{n}$

Exercice2 *Soit*

$$(u_n): u_{n+2} = \frac{1}{2}u_n$$

Exprimer u_n en fonction de n et des premiers termes u_0 et u_1 de la suite.

Solution

Non, ce n'est pas une suite géométrique. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Nous présenterons ici deux méthodes pour traiter l'exercice.

Méthode 1. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire du second ordre est

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

elle admet deux solutions $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par suite, il existe deux réels λ et μ tels que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

On a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2}\mu = u_1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on peut, par exemple multiplier la première ligne par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'additionner à la seconde; on obtient alors $\mu = \frac{u_0}{2} + \frac{u_1}{\sqrt{2}}$; on en déduit $\lambda = \frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{\sqrt{2}}$.

Par suite:

$$u_n = \left(\frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + \left(\frac{u_0}{2} + \frac{u_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

Méthode 2. On se ramène à deux suites géométriques en considérant les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}). Immédiatement, pour tout k appartenant à ℕ:

$$\begin{cases} u_{2k+2} = \frac{1}{2}u_{2k} \\ u_{2k+3} = \frac{1}{2}u_{2k+1} \end{cases}$$

Ces deux suites sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que pour tout entier positif k:

$$\begin{cases} u_{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k u_0 \\ u_{2k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k u_1 \end{cases}$$

Laissons le soin au lecteur de vérifier que les résultats obtenus par ces deux méthodes coïncident.

Exercice3 *Etudier la monotonie de la suite (u_n) définie par:*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Solution

Deux méthodes pour prouver que (u_n) est monotone.

Méthode 1. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + \frac{1}{4}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Il en résulte que (u_n) est croissante

Méthode 2. On remarque que (u_n) est une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour montrer que la suite (u_n) est monotone, on va déjà montrer que la fonction f est croissante.

On notera d'abord que pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

En effet, $u_0 = \frac{1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

Supposons que pour un n, quelconque fixé, $u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, alors

$$\frac{1}{16} \leq u_n^2 \leq \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \leq u_n^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ et donc : } \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

<u>Conclusion</u>: pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

La fonction f définie par sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$$

est strictement croissante sur cet intervalle.

Comparons maintenant les deux premiers termes de la suite:

$$u_1 = f(u_0),\ u_1 = u_0^2 + \frac{1}{4},\ u_1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \text{ et donc } u_1 \geq u_0.$$

Un raisonnement par récurrence permet de conclure:

Supposons que pour un n quelconque fixé, $u_{n+1} \geq u_n$, on va en déduire que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

On a

$$\frac{1}{4} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \text{ et } f \text{ croissante sur } \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \text{ donc:}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

et par suite $\frac{1}{4} \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$

Ce qui prouve que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$ et par suite, que (u_n) est croissante et : $\forall n \in N,\ u_n \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

Bien sûr, la seconde méthode est beaucoup plus longue que la première, mais elle a l'avantage d'être indépendante de la fonction f; il en résulte qu'on peut "recoller" cette démonstration chaque fois qu'on a une suite (u_n) définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction croissante sur un intervalle I à valeurs dans I.

Exercice4 *Montrer que (10^n) est négligeable devant $(n!)$ lorsque $n \to +\infty$*

Solution

On considère la suite

$$(u_n): u_n = \frac{10^n}{n!}$$

C'est une suite à termes strictement positifs; exprimons u_{n+1} en fonction de u_n. On a:

$$u_{n+1} = \frac{10^n \times 10}{n!(n+1)} = \frac{10}{n+1}u_n, \text{ pour } n \geq 20,\ \frac{10}{n+1} < \frac{1}{2} \text{ et donc: } 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}u_n.$$

On montre alors par récurrence, que pour tout entier n plus grand que 20, on a:

$$0 < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-20}u_{20} \text{ Or } \left(\frac{1}{2}\right)^{n-20}u_{20}$$

est le terme général d'une suite géométrique convergente de limite 0, car de raison, en valeur absolue, inférieure à 1.

D'après le théorème d'encadrement, appelé aussi théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente de limite 0.

Il en résulte que (10^n) est négligeable devant $(n!)$.

Exercice5 *Montrer que pour tout entier naturel r et pour tout réel x appartenant à]0, 1[,*

$$\lim_{n\to+\infty} C_{r+n}^n x^n = 0$$

Solution

Posons $u_n = C_{r+n}^n x^n$; il est clair que u_n est positif et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{C_{r+n+1}^{n+1}x^{n+1}}{C_{r+n}^n x^n} = \frac{r+n-1}{n+1}x$$

On a $\lim_{n\to+\infty}\frac{r+n+1}{n+1} = 1$ et par suite $\lim_{n\to+\infty}\frac{r+n+1}{n+1}x = x$; il existe donc un entier naturel N à partir duquel, $0 < \frac{r+n+1}{n+1}x < \frac{x+1}{2} < 1$

Il en résulte, par un principe souvent appelé principe des dominos (que nous rappelons ici),

$\forall n > N,\quad u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\times\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\times\cdots\times\frac{u_{N+1}}{u_N}\times u_N$, la relation suivante: $0 < u_n < \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-N} u_N$

Un célèbre théorème de gendarmerie nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{n+k}^{n} x^n = 0$ par le fait que $\frac{x+1}{2}\subset\,]0,1[$ et que u_N soit une constante pour la variable n.

Suites et probabilités

Exercice6 *Un étudiant préparant un concours révise pendant les vacances de la façon suivante:*

- *S'il fait des maths le matin, il y a une chance sur trois pour qu'il fasse de l'histoire l'après-midi, deux chances sur trois pour qu'il fasse une langue.*
- *S'il fait de la culture le matin, il fera de l'histoire dans trois cas sur quatre et des langues dans un cas sur quatre l'après-midi.*
- *S'il fait des maths un matin, il y a deux chances sur trois pour qu'il refasse des maths le lendemain matin et s'il a fait de la culture, le lendemain il fera indépendamment des maths ou de la culture.*

On note m_n, c_n, h_n, l_n les probabilités qu'il fasse respectivement des maths, de la culture, de l'histoire, des langues, le jour n°n.

Sachant qu'au matin du premier jour (jour n°1) il a fait de la culture, déterminer les probabilités m_n, c_n, h_n, l_n.

Solution

Récapitulons les données dans deux tableaux:

j_{n+1} j_n	M	C
M	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

j_n a_n	H	L
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Le premier tableau donne les probabilités de faire des maths ou de la culture au matin du jour n°n+1 sachant ce qu'on a fait au jour n°n

Le second tableau donne les probabilités de faire de l'histoire ou des langues l'après-midi du $n^{\text{ème}}$ jour sachant ce qu'on a fait le matin.

Au matin du $n^{\text{ème}}$ jour, la paire $\{M_n, C_n\}$ constitue un système complet d'événements et on a respectivement:

$$\begin{cases} m_{n+1} = p(M_{n+1} / M_n)m_n + p(M_{n+1} / C_n)c_n \\ c_{n+1} = p(C_{n+1} / M_n)m_n + p(C_{n+1} / C_n)c_n \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} h_n = p(H_n / M_n)m_n + p(H_n / C_n)c_n \\ l_n = p(L_n / M_n)m_n + p(L_n / C_n)c_n \end{cases}$$

En remplaçant les probabilités conditionnelles par leurs valeurs:

$$\begin{cases} m_{n+1} = \frac{2}{3}m_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}m_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases} \qquad \begin{cases} h_n = \frac{1}{3}m_n + \frac{3}{4}c_n \\ l_n = \frac{2}{3}m_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

En remarquant que $m_n + c_n = 1$, on a:

$$m_{n+1} = \frac{2}{3}m_n + \frac{1}{2}(1-m_n) = \frac{1}{6}m_n + \frac{1}{2}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique de point fixe a vérifiant:

$$a = \frac{1}{6}a + \frac{1}{2} \text{ d'où } m_{n+1} - a = \frac{1}{6}(m_n - a) \text{ et } a = \frac{3}{5} \text{ ainsi } m_n = a\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right)$$

Finalement on a:

$$m_n = \frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right);\quad c_n = \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

On obtient en conséquence: $\begin{pmatrix} h_n \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) \\ \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$

C'est à dire: $h_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ $\quad l_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

Suites et calcul intégral

Exercice7 Dans tout le problème a désigne un réel donné strictement positif.

1) Montrer que :

$$\int_0^a te^t\,dt = ae^a - \int_0^a e^t\,dt$$

en déduire que

$$e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t\,dt$$

2) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On pose:

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}e^t\,dt.$$

Montrer que :

$$I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

3) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$.

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$$

4) Montrer que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$$

5) On pose :

$$u_n = \frac{a^n}{n!}$$

Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$

En déduire que (u_n) est convergente, préciser sa limite, puis celle de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

6) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$$

Solution

1) On effectue une intégration par parties ; on pose :

$$\begin{cases} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$$

Les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, a]$; on obtient immédiatement :

$\int_0^a te^t\,dt = ae^a - \int_0^a e^t\,dt$; développons $\int_0^a (a-t)e^t\,dt$; on a :

$$\int_0^a (a-t)e^t\,dt = a\int_0^a e^t\,dt - \int_0^a te^t\,dt = a\left[e^t\right]_0^a - \left(ae^a - \int_0^a e^t\,dt\right)$$

$$\int_0^a (a-t)e^t\,dt = \left(ae^a - a\right) - ae^a + \left[e^t\right]_0^a = ae^a - a - ae^a + \left(e^a - 1\right) = e^a - 1 - a$$

Par transposition, on obtient : $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t\,dt$

2) A l'aide d'une intégration par parties, on calcule :

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}e^t\,dt$$

On pose :

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{(a-t)^n}{n!} & u(t) = -\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v(t) = e^t & v'(t) = e^t \end{cases}$$

On obtient :

$$I_n = \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt = 0 + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^0 + I_{n+1} \text{ donc } I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

3) On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$$

4) D'après la première question,

$$e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t\,dt$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$; on suppose que pour un n quelconque mais fixé,

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$$

on doit en déduire que

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

Dans la relation : $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$ utilisons $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

il s'ensuit que $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Il en résulte que pour tout entier naturel n non nul,

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$$

5) On a :

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}e^t\,dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{(a-t)^n}{n!}e^t$ est positive sur $[0, a]$; il en résulte que $0 \leq I_n$

Par ailleurs, pour tout réel t élément de $[0, a]$, $\frac{(a-t)^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!}$ et par suite, $\frac{(a-t)^n}{n!}e^t \leq \frac{a^n}{n!}e^t$. Il s'ensuit que $I_n \leq \int_0^a \frac{a^n}{n!}e^t\,dt \leq \frac{a^n}{n!}\int_0^a e^t\,dt$ et finalement

$$0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}\left(e^a - 1\right)$$

6) On considère la suite de terme général $u_n = \frac{a^n}{n!}$

C'est une suite à termes strictement positifs; exprimons u_{n+1} en fonction de u_n. On a:

$$u_{n+1} = \frac{a^n \times a}{n!\times(n+1)} = \frac{a}{n+1}u_n$$

Pour $n + 1 \geq 2a$, $\frac{a}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ et donc $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

On montre alors par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à $n_0 = 2a - 1$, on a: $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}$. Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}u_{n_0}$ est le terme général d'une suite géométrique convergente de limite 0, car de raison, en valeur absolue, inférieure à 1.

D'après le théorème d'encadrement, appelé aussi théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente de limite 0.

L'encadrement : $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}\left(e^a - 1\right)$ et la limite de la suite (u_n) implique par théorème d'encadrement que (I_n) est convergente de limite 0.

7) De la troisième question, il résulte que :

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n \text{ donc } I_n = \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right) - e^a$$

D'après la question précédente, (I_n) est convergente de limite 0 ; donc

$$\left(\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right) - e^a\right)$$ **est convergente de limite 0 et par suite,**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$$

Constante d'Euler

Exercice8

Question préliminaire

Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel non nul n

$$\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n} \quad (I)$$

On considère la suite $(u_n)_{n\ge1}$ de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

et la suite $(v_n)_{n\ge2}$ de terme général

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$$

1°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (Pour étudier le sens de variation de ces suites on pourra utiliser l'inégalité (I))

2°) On note γ leur limite commune. Justifier que pour tout $n \ge 2 \quad v_n \le \gamma \le u_n$

En déduire que $0 \le \gamma \le 1$

3°) Montrer que pour obtenir une valeur approchée par excès de γ à 10^{-2} près il suffit de calculer u_{100}

Solution

Question préliminaire

Pour tout entier naturel n non nul, la fonction ln est de classe C^1 sur $[n, n+1]$; elle vérifie donc les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis :

Elle est continue sur $[n, n+1]$

Elle est dérivable sur $]n, n+1[$, de dérivée bornée, comprise entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$.

L'inégalité des accroissements finis permet d'écrire :

$$\frac{1}{n+1}[(n+1)-n] \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}[(n+1)-n].$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}$$

1°) Montrons que les deux suites (u_n) et (v_n) sont monotones :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)]$$

D'après la question préliminaire :

$$u_{n+1} - u_n \le 0$$

Il en résulte que <u>(u_n) est décroissante</u>. De même, pour tout n supérieur ou égal à 2,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - [\ln(n+1) - \ln(n)]$$

D'après la question préliminaire :

$$v_{n+1} - v_n \ge 0$$

Il en résulte que la suite <u>(v_n) est croissante</u>. Montrons que la suite $(u_n - v_n)$ est convergente de limite 0.

On a, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n - v_n = \frac{1}{n}$$

Il est clair que <u>$(u_n - v_n)$ est convergente de limite 0.</u>

On a montré :

(u_n) est décroissante

(v_n) est croissante

$(u_n - v_n)$ est convergente de limite 0

Il en résulte que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite, elles sont convergentes de même limite γ.

2°) Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante, donc leur limite commune γ vérifie, pour n supérieur ou égal à 2, $v_n \le \gamma \le u_n$.

3°) La relation $v_n \le \gamma \le u_n$ implique que $0 \le u_n - \gamma \le u_n - v_n$; d'autre part, on a la relation $u_n - v_n \le \frac{1}{n}$ obtenue en première question, donc $0 \le u_n - \gamma \le \frac{1}{n}$; il en résulte que pour n = 100, on a $0 \le u_{100} - \gamma \le \frac{1}{100}$ et donc u_{100} est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Fonctions polynômes

Exercice9 *Soit f la fonction définie sur ℝ par*

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

où a, b et c sont trois réels distincts deux à deux. Montrer, sans développer ni réduire l'écriture précédente, que f est une fonction constante sur ℝ.

Solution

f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 comme somme de trois fonctions polynômes du second degré

Calculons $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$. On trouve immédiatement $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ et $f(c) = 1$

Considérons alors la fonction polynôme g définie pour tout réel x par:

$$g(x) = f(x) - 1$$

g est la somme de deux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, elle est elle-même une fonction polynôme de degré inférieure ou égal à 2; or

$$g(a) = f(a) - 1 = 0$$

$$g(b) = f(b) - 1 = 0$$

$$g(c) = f(c) - 1 = 0$$

Ainsi g a au moins trois zéros, ce qui n'est possible que si g est la fonction nulle.

Il en résulte que f est une fonction polynôme constante et égal à 1.

Exercice10 *Soit A, B et C trois polynômes tels que:*

$$A \ne 0 \qquad AB = AC$$

Montrer que $B = C$.

Solution

On a souvent besoin d'utiliser cette propriété, appelée propriété d'intégrité du produit des polynômes.

L'écriture $AB = AC$ est équivalente à la suivante: $AB - AC = 0$. Factorisons:

$$A(B - C) = 0$$

Le polynôme A n'est pas nul; il admet donc un nombre fini de zéros; par suite $B - C$ s'annule pour une infinité de valeurs; il en résulte que $B - C = 0$ et donc $B = C$.

Utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes

Exercice11 Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que:

$$x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$$

En déduire

$$\int_2^3 \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}{(x-1)^4}\,dx$$

Solution

La formule de Taylor pour une fonction polynôme f du troisième degré permet d'écrire :

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$; on a $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$, $f''(x) = 6x - 6$ et $f'''(x) = 6$; il s'ensuit :

$$f(1) = 4,\ f'(1) = 2 \text{ et } f''(1) = 0$$

On en déduit que $f(x) = 4 + 2(x-1) - (x-1)^3$

Pour le calcul de l'intégrale, on remplace la fonction polynôme par son écriture en fonction de $x - 1$:

$$\int_2^3 \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}{(x-1)^4}\,dx = \int_2^3\left(4\frac{1}{(x-1)^4} + 2\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$\int_2^3 \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}{(x-1)^4}\,dx = -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{(x-1)^3}\right]_2^3 - \left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_2^3 + [\ln|x-1|]_2^3$$

$$\int_2^3 \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}{(x-1)^4}\,dx = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{8} - 1\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) + \ln 2 - \ln 1$$

On obtient finalement :

$$\int_2^3 \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}{(x-1)^4}\,dx = \frac{23}{12} + \ln 2$$

Équations

Exercice12 *Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que l'équation $ae^{-ax} = be^{-bx}$ admet une solution unique dans $[0, +\infty[$*

Etudier la position relative des courbes d'équations $f(x) = ae^{-ax}$ et $g(x) = be^{-bx}$

Solution

Après une année de (dé)formation, il est remarquable que les étudiants ne pensent plus qu'à une seule méthode devant un énoncé du type:

Montrer que l'équation… admet une solution unique dans …

Cette méthode se résume en l'application d'un théorème souvent appelé "le théorème de la bijection". Dans le cas présent on ne vous conseille pas de l'utiliser.

Mais alors comment faire?

Rappelez-vous des principes simples. Avant de connaître ce théorème, à une telle question vous y répondiez en cherchant à résoudre l'équation. En trouvant une solution unique, vous prouvez l'existence et l'unicité de la solution. Encore faut-il bien procéder par équivalence:

$$0 < a < b, \quad ae^{-ax} = be^{-bx} \Leftrightarrow \ln a - ax = \ln b - bx$$

$$0 < a < b, \quad ae^{-ax} = be^{-bx} \Leftrightarrow (b-a)x = \ln b - \ln a$$

Et par suite:

$$0 < a < b \quad ae^{-ax} = be^{-bx} \Leftrightarrow x = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$$

Le réel b étant plus grand que a, la valeur de x trouvée est positive. Ce qui prouve que l'équation admet bien une racine dans $[0, +\infty[$ et que cette racine est unique.

Pour déterminer la position relative des courbes des fonctions f et g, il est vivement déconseiller de chercher le signe de $f(x) - g(x)$; vous aurez plus vite fait de résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$, par exemple.

$0<a<b,\quad ae^{-ax}<be^{-bx}\Leftrightarrow \ln a-ax<\ln b-bx$

$0<a<b,\quad ae^{-ax}<be^{-bx}\Leftrightarrow (b-a)x<\ln b-\ln a$

Et par suite:

$0<a<b\quad ae^{-ax}<be^{-bx}\Leftrightarrow x<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

Il en résulte que

la courbe de f est en dessous de la courbe de g pour $x\in\left]0,\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\right[$,

la courbe de f est au dessus de la courbe de g pour $x\in\left]\frac{\ln b-\ln a}{b-a},+\infty\right[$.

Probabilités

Conseil de révisions sur le dénombrement

Il faut absolument connaître (n et p étant des entiers naturels non nuls), le nombre de p–listes, le nombre de p–listes sans répétition, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n ainsi que le nombre de p–listes strictement croissantes de $\{1, \ldots, n\}$ et le nombre de n–listes de $\{0; 1\}$ contenant p fois 1. Ceci figure sûrement quelque part dans votre cours !

Exercice13 *Soient n et p deux entiers naturels ≥2 tels que n≥p.*
Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On effectue p tirages successifs d'une boule avec remise.
A -1°) Quelle est la probabilité que les numéros des boules tirées soient tous différents ?
2°) Quelle est la probabilité qu'au moins deux boules tirées aient le même numéro ?
3°) Quelle est la probabilité qu'exactement deux boules tirées aient le même numéro ?
B - Pour tout entier k strictement positif et inférieur ou égal à p, on note N_k le numéro de la $k^{ème}$ boule tirée
1°) Quelle est la probabilité qu'il existe un entier i strictement positif et inférieur ou égal à p-1 tel que

$N_i \geq N_{i+1}$?

2°) Uniquement dans cette question, on fixe deux entiers distincts i et j, strictement positifs et inférieur ou égal à p.

a) Quelle est la probabilité que $N_i = i$?
b) Quelle est la probabilité que $N_i = i$ et $N_j = j$

3°) Quelle est la probabilité qu'il existe au moins un entier k strictement positif et inférieur ou égal à p tel que

$N_k = k$?

C- Reprendre les questions B- 2°) et 3°) dans le cas de n tirages successifs et sans remise (donc p=n) puis calculer la limite de l'expression obtenue lorsque n tend vers +∞.

Solution

Le résultat d'une expérience de p tirages d'une boule avec remise sera modélisé par une p–liste de $\{1, \ldots, n\}$. Soit donc Ω l'ensemble des p–listes de $\{1, \ldots, n\}$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

A-1°) Soit A = « les numéros sont tous différents »: A est modélisé par l'ensemble des p-listes sans répétition de $\{1, \ldots, n\}$ et donc :

$$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{A_n^p}{n^p}$$

2°) Soit B = « Au moins deux boules ont le même numéro »; $B=\overline{A}$ donc $p(B)=1-p(A)$.
3°) Soit C=« exactement deux boules ont le même numéro »; C est donc l'ensemble des p-listes de $\{1, \ldots, n\}$ comprenant 2 termes identiques et une $(p-2)$ liste de $\{1, \ldots, n\}$ ne contenant pas le terme dédoublé.
Pour construire un élément de C, on choisit un élément de $\{1, \ldots, n\}$, notons-le α (n choix) pour chacun de ces choix on place α deux fois dans une p–liste de $\{1, \ldots, n\}$: c'est à dire qu'on choisit une famille de deux numéros dans $\{1, \ldots, n\}$ (C_n^2 choix); il reste à compléter avec une $(p-2)$-liste sans répétition de $\{1, \ldots, n\}-\{\alpha\}$ (A_{n-1}^{p-2} choix). Au total :

$$card(C)=n.C_n^2\,A_{n-1}^{p-2}\qquad\text{et donc }p(C)=\frac{nC_n^2A_{n-1}^{p-2}}{n^p}$$

B-1°) Soit D l'événement contraire c'est à dire D=« $\forall i\le p-1$, on a : $N_i<N_{i+1}$ », D est donc l'ensemble des p-listes strictement croissantes de $\{1, \ldots, n\}$; on sait d'après le cours que card$(D)=C_n^p$; donc $p(D)=\frac{C_n^p}{n^p}$ et par suite $p(\overline{D})=1-\frac{C_n^p}{n^p}$.
2-a) Soit E = « $N_i = i$ »: E est l'ensemble des p–listes de $\{1, \ldots, n\}$ contenant i à la $i^{ème}$ place. Pour construire une telle liste on place i (qui est fixé !) à la $i^{ème}$ place et on complète avec une $(p-1)$-liste de $\{1, \ldots, n\}$ (n^{p-1} choix). Donc $p(E)=\frac{n^{p-1}}{n^p}=\frac{1}{n}$(c'est normal puisque la boule i a autant de chances que les autres de se trouver à la i-ième place)
b) Soit F = « $N_i = i$ et $N_j = j$ »; n'oublions pas que i et j sont fixés. F est l'ensemble des p-listes de $\{1, \ldots, n\}$ contenant i à la $i^{ème}$ place et j à la $j^{ème}$ place. Pour construire une telle liste on place i et j aux places numéros i et j, et on complète avec une $(p-2)$-liste de $\{1, \ldots, n\}$ (n^{p-2} choix). Donc :

$$p(F)=\frac{n^{p-2}}{n^p}=\frac{1}{n^2}.$$

3°) Soit G = « il existe $k\le p$ tel que $N_k = k$ ». On a donc $\overline{G}$ ="$\forall k\le p,\ N_k\neq k$"; pour construire un élément de $\overline{G}$ on choisit un élément de $\{2, \ldots, n\}$ et on le met à la première place ($n-1$ choix), puis on choisit un élément de $\{1, 3, \ldots, n\}$ et on le met à la deuxième place ($n-1$) choix, etc..., et on continue jusqu'à la case p. Donc :
card$(G)=(n-1)^p$. En conclusion:

$$p(G)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^p\text{ si }p\le n.$$

C- Dans ce cas Ω est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Donc card(Ω)=n!
1°) Soit E = « $N_i = i$ »; E est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ contenant i à la $i^{ème}$ place. Pour construire une telle permutation on place i (qui est fixé !) à la $i^{ème}$ place et on complète avec une permutation de $\{1, \ldots, n\}-\{i\}$ ($(n-1)!$ choix). Donc :

$$p(E)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

2°) Soit F = « $N_i = i$ et $N_j = j$ »; n'oublions pas que i et j sont fixés. F est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ contenant i à la $i^{ème}$ place et j à la $j^{ème}$ place. Pour construire une telle permutation on place i et j aux places numéros i et j, et on complète avec une permutation de $\{1, \ldots, n\}-\{i, j\}$ ($(n-2)!$ choix).
Donc :

$$p(F)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}.$$

3°) Plus généralement, si k est un entier $\leqslant n$ et si $i_1, \ldots, i_k$ sont des entiers deux à deux distincts, la probabilité de l'événement $(N_{i_1}=i_1)\cap\ldots\cap(N_{i_k}=i_k)$ est $\frac{(n-k)!}{n!}$
Soit G = « Il existe $k\leqslant n$ tel que $N_k = k$ ». Notons, pour tout $i\leqslant n$ G_i = « $N_i = i$ ». (i n'est plus fixé). Il est clair que $G=\bigcup_{i\le n}G_i$. Donc d'après la formule du crible :

$$p(G)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\sum_{0<i_1<\ldots<i_k\le n}p\big((N_{i_1}=i_1)\cap\ldots\cap(N_{i_k}=i_k)\big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\sum_{0<i_1<\ldots<i_k\le n}\frac{(n-k)!}{n!}$$

Mais

$$\sum_{0<i_1<\ldots<i_k\le n}1=C_n^k$$

(A ce propos rappelons que si E est un ensemble fini, $\sum_{x\in E}1=card(E)$ et que le nombre de k–listes strictement croissantes de $\{1, \ldots, n\}$ est C_n^k)
Donc :

$$p(G)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot C_n^k\frac{(n-k)!}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k!}$$

qui ne se simplifie pas mais dont la célèbre limite lorsque n tend vers +∞ est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k!}=1-\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k!}=1-\frac{1}{e}.$$

Les probabilités conditionnelles

Pour ce chapitre, il faut réviser la notion de probabilité conditionnelle, la formule des probabilités totales, la formule des probabilités composées, la formule de Bayes.

Exercice14 *On dispose de deux pièces de monnaie A et B: avec la pièce A, on obtient pile avec la probabilité 1/3, avec la pièce B on obtient pile avec la probabilité 3/4. On effectue une série de lancers de la façon suivante : On choisit une pièce au hasard et on la lance; si on obtient pile on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce. Calculer la probabilité d'obtenir pile au $n^{ème}$ lancer.*

Solution

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé modélisant cette situation; Pour tout entier non nul k, notons A_k = « on utilise la pièce A lors du lancer n°k » et notons P_k = « avoir pile lors du lancer n°k ». On cherche $p(P_n)$.

Cherchons tout d'abord, pour tout entier non nul k, $p(A_k)$.
k étant fixé supérieur ou égal à 1, le système $\{A_k, \overline{A_k}\}$est un système complet d'événement, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(A_{k+1})=p(A_{k+1}/A_k)p(A_k)+p(A_{k+1}/\overline{A_k})p(\overline{A_k})$$

Mais $p(A_{k+1}/A_k)$ est la probabilité de garder la pièce A au $(k+1)^{ème}$ lancer sachant qu'on l'avait déjà; c'est donc la probabilité d'avoir pile avec la pièce A c'est à dire 1/3; de même $p(A_{k+1}/\overline{A_k})$ est la probabilité de prendre la pièce A au $(k+1)^{ème}$ lancer sachant qu'on avait la pièce B auparavant; c'est donc la probabilité d'avoir face avec la pièce B c'est à dire 1/4. On en déduit :

$$p(A_{k+1})=\frac{1}{3}p(A_k)+\frac{1}{4}p(\overline{A_k})$$

$$p(A_{k+1})=\frac{1}{3}p(A_k)+\frac{1}{4}(1-p(A_k))=\frac{1}{12}p(A_k)+\frac{1}{4}$$

La suite $(p(A_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmético-géométrique que l'on traite selon la méthode habituelle, c'est à dire, pour résumer :
on cherche son point fixe (solution de $x=x/12+1/4$), on trouve $x=3/11$; la suite

$$\left(p(A_k)-\frac{3}{11}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$$

est géométrique de raison 1/12 d'où pour tout entier k non nul:

$$p(A_k)-\frac{3}{11}=\left(p(A_1)-\frac{3}{11}\right)\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}$$

donc

$$p(A_k)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{11}\right)\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}+\frac{3}{11}=\frac{5}{22}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}+\frac{3}{11}$$

Enfin, toujours avec le même système complet d'événements, on a :

$$p(P_n)=p(P_n/A_n)p(A_n)+p(P_n/\overline{A_n})p(\overline{A_n})$$

$$p(P_n)=\frac{1}{3}p(A_n)+\frac{3}{4}p(\overline{A_n})$$

$$p(P_n)=\frac{1}{3}p(A_n)+\frac{3}{4}(1-p(A_n))$$

donc

$$p(P_n)=-\frac{5}{12}p(A_n)+\frac{3}{4}$$

et donc

$$p(P_n)=\frac{-25}{22}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^n+\frac{7}{11}$$

Les variables aléatoires

Exercice15

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\{0,...,n\}$. Démontrer que $E(X)=\sum_{k=0}^{n} p(X>k)$

Solution

Notons F la fonction de répartition de X, on a, pour tout entier k de $X(\Omega)$,

$$p(X=k)=p(k-1<X\leq k)=F(k)-F(k-1)$$

(Utile à retenir pour d'autres exercices !). Donc

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k.p(X=k)=\sum_{k=0}^{n} k.(F(k)-F(k-1))$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k.F(k)-\sum_{k=0}^{n} k.F(k-1)=\sum_{k=0}^{n} k.F(k)-\sum_{i=0}^{n-1}(i+1).F(i)$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k.F(k)-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1).F(k)$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k.F(k)-\sum_{k=0}^{n-1} k.F(k)-\sum_{k=0}^{n-1} F(k)=nF(n)-\sum_{k=0}^{n-1} F(k)$$

d'où puisque $F(n)=1$:

$$E(X)=n-\sum_{k=0}^{n-1} p(X\leq k)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-p(X\leq k))=\sum_{k=0}^{n-1} p(X>k)$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n-1} p(X>k+1)=\sum_{i=1}^{n} p(X\geq i)$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

Pascal

Exercice16

a) Pour tout entier n strictement positif et tout entier k compris entre 1 et n, exprimer C_n^k sous la forme

$$\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{...}{...}\right)$$

b) En déduire un programme qui demande à l'utilisateur un nombre entier n et qui affiche

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}$$

Solution

On va utiliser la formule, valable pour k et n entiers tels que $1 \leq k \leq n$, et qu'il vous faudra justifier! :

$$C_n^k=\frac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{k(k-1)...[k-(k-1)]}=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{k-i}$$

Allez, ce n'est si dur; remarquez que le dénominateur est égal au factoriel k et que le numérateur est égal au factoriel de n divisé par le factoriel de $n-k$.

Passons maintenant au programme. On définit d'abord une fonction qui prend en argument des nombres n et k et qui rend le nombre C_n^k (on suppose $k \leq n$))

```
program exo1;

function Coeffbin(n,k:integer):integer;
var
              i          : integer;
        Prod_partiel    : real;

begin
  Prod_partiel := 1;
   If k = 0 then coeffbin := 1 else
    for i:=0  to  k-1  do
        begin
            Prod_partiel := Prod_partiel*(n-i)/(k-i);
  Coeffbin := trunc(Prod_partiel);              {on transforme le nombre de type real
                                                            en nombre de type integer}
end;                                            {fin de la fonction}

{déclaration des variables du programme principal}
Var    Sompart         : real;
       n, k            : integer;

{programme principal}
Begin                              {début du programme principal}
  writeln('Donnez n');
  readln(n);
  Sompart := 0;        {sompart est donc la somme partielle qui va contenir dans l'ordre
```

$$1,\ 1+\frac{1}{C_n^1},\ \ 1+\frac{1}{C_n^1}+\frac{1}{C_n^2},...,\ \ 1+\frac{1}{C_n^1}+...+\frac{1}{C_n^n}\ \}$$

```
  for  k := 0  to  n  do

        Sompart := Sompart + 1/Coeffbin(n,k);      {à chaque tour de boucle on rajoute 1/C_n^k }

  writeln('Résultat :',Sompart);
End.
```

Exercice17

1°) *Ecrire une fonction qui prend en argument un nombre entier naturel n et qui rend une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de la solution de l'équation* $x^3+x=n$ (E$_n$)

2°) *On appelle, pour tout élément de ℕ, u_n la solution de l'équation (E$_n$). En utilisant la fonction précédente, écrire un programme qui affiche des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1, u_2, u_3,..., u_{100}.*

Solution

```
program exo2;

function f(x:real):real;        {commençons par définir la fonction x ↦ x^3 + x }
begin
  f:=x*x*x + x;
end;
```

{construisons ensuite la fonction $u : n \mapsto u_n$

f étant strictement croissante et continue sur ℝ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, elle est bijective de ℝ vers ℝ. Tout entier naturel n a donc bien un antécédent par f. L'équation $x^3+x=n$ a donc une solution et une seule notée u_n.

Le principe est celui de la dichotomie : $f(0)=0 \leq n$ et $f(n) \geq n$; donc $u_n \in [0,n]$

Si $f((0+n)/2) \leq n$ alors $u_n \subset [\frac{n+1}{2},n]$ sinon $u_n \in [0,\frac{n+1}{2}]$ ...., plus généralement lorsqu'on sait que $u_n \subset [a,b]$, Si $f((a+b)/2) \leq n$ alors $u_n \in [\frac{a+b}{2},b]$ et on remplace a par $\frac{a+b}{2}$ sinon $u_n \in [a,\frac{a+b}{2}]$ et on remplace b par $\frac{a+b}{2}$ et ainsi de suite,..., la longueur de $[a, b]$ est divisé par 2 à chaque fois et la boucle continue jusqu'à ce que cette longueur soit inférieure à 10^{-3}.}

```
function u(n:integer):real;
var      a, b : real;                {variables locales de la fonction u}

begin
  a := 0;
  b := n;
  while  (b-a > 0.001)  do
          begin
            if  f((a+b)/2) <= n  then  a := (a+b)/2  else  b:=(a+b)/2;
          end;
  u:=(a+b)/2;
end;

{déclaration des variables du programme principal}
var      k : integer;

{ programme principal}
Begin
  for  k := 1  to  100  do  writeln(u(k));
End.
```

Attention! On ne peut pas permuter l'ordre des deux fonctions dans l'écriture de ce programme. En effet la seconde fonction (notée u) appelle la première (notée f); ne pas oublier qu'on ne peut pas utiliser ce qui n'a pas d'abord été déclaré.

Exercice18

1°) *Ecrire une procédure qui a pour arguments deux entiers x et y et qui échange les contenus de x et y.*

2°) *Ecrire une procédure, utilisant la précédente, qui a pour arguments trois nombres entiers x, y et z et qui les trie dans l'ordre croissant.*

3°) *Utiliser ces procédures pour écrire un programme qui demande 3 nombres à l'utilisateur et qui les affiche dans l'ordre croissant.*

Solution

```
program exo3;

procedure echange(var x,y : real);
         {on doit écrire "var" devant x et y afin qu'ils puissent être modifiés...
                                          Revoyez le cours de votre professeur à ce sujet! }
{Cette procédure échange les contenus des variables x et y}
var      temp : real;

begin
  temp := x;
  x    := y;
  y    := temp;
end;

procedure tri(var x,y,z : real);
         {cette procédure va échanger les contenus de x, y et z
                                   de telle façon qu'ils soient ordonnés dans l'ordre croissant}
begin
  if (x>y) then echange(x,y); {on est donc sur maintenant que x <= y}
  if (z<x) then echange(x,z); {maintenant x est le plus petit des 3}
  if (y>z) then echange(y,z); {on a maintenant x<=y<=z}
end;

{déclaration des variables du programme principal}
var      a,b,c : real;

{programme principal}
Begin
  writeln('donnez 3 nombres');
  readln(a,b,c);
  tri(a,b,c);
  writeln(a,b,c);
End.
```

<u>Question subsidiaire</u>: Peut-on écrire la procédure "tri" avant la procédure "échange"?