Mathématiques
Voie économique

Corrigé de l'épreuve de Maths III ESCP-EAP 2000

Jean Mallet
Agrégé de mathématiques, professeur en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Montaigne (Paris) et Prépasup (Paris).

Michel Miternique
Agrégé de mathématiques, professeur en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Jean-Baptiste Corot (Savigny sur Orge) et IPESUP (Paris).

Enoncé

EXERCICE I

Dans tout l'exercice, α désigne un paramètre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Montrer que, quel que soit α, l'endomorphisme ϕ_α admet la valeur propre 1.

b) On note $E_1(\alpha)$ le sous-espace propre de ϕ_α associé à la valeur propre 1. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $E_1(\alpha)$.

2. On considère les vecteurs

$$f_1 = (1,1,-1) \quad \text{et} \quad f_2 = (1,1,-2)$$

et on note F_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par f_1 et f_2.

a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de F_1.

b) Montrer que l'image par ϕ_α de tout vecteur de F_1 appartient à F_1.

c) Soit $\tilde{\phi}_\alpha$ l'endomorphisme de F_1 induit par ϕ_α c'est-à-dire vérifiant, pour tout vecteur V de F_1, $\tilde{\phi}_\alpha(V) = \phi_\alpha(V)$. Donner la matrice de $\tilde{\phi}_\alpha$ dans la base (f_1, f_2) de F_1.

3. Montrer que, pour tout réel α, l'endomorphisme ϕ_α admet la valeur propre $\alpha - 1$ et qu'on peut trouver un vecteur f_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α, qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de ϕ_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.

4. a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de ϕ_α dans cette base.

b) Pour quelles valeurs du paramètre α l'endomorphisme ϕ_α est-il diagonalisable ?

EXERCICE II

I. Étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire

Étant donné un paramètre réel $\alpha > 0$, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de réels qui vérifient, pour tout n positif, la relation

$$u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$

1. Montrer qu'on peut trouver deux réels r et s, avec $r < s$, tels que les suites $R = (r^n)_{n\geq 0}$ et $S = (s^n)_{n\geq 0}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$. Exprimer r et s en fonction de α et comparer $|r|$ et $|s|$.

2. Étant donné un élément $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{E}$ s'écrivant $U = aR + bS$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donner l'expression de a et b en fonction de u_0 et u_1.

3. On suppose, dans cette question, que l'on a $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

   Soit $U = (u_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathcal{E}$.

   a) Montrer que la suite U converge vers 0.

   b) Si $u_1 - u_0 r$ n'est pas nul, montrer qu'il existe un indice n_0 tel que, pour $n > n_0$, u_n ne s'annule pas et garde un signe constant et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n} = \ln s$$

   c) Montrer que si, au contraire, $u_1 - u_0 r$ est nul et si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas identiquement nulle, alors, pour tout entier n positif, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. Quel équivalent peut-on donner, dans ce cas, de $\ln|u_n|$?

4. On suppose, dans cette question, que l'on a $\frac{1}{2} < \alpha$.

   À quelle condition sur u_0 et u_1 l'élément $U = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{E}$ est-il une suite bornée ? Montrer que les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont des suites bornées forment un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ dont on précisera la dimension.

II. Étude d'une récurrence non linéaire

Soit β un réel strictement positif. On note $m = \min(1,\beta)$ le plus petit des nombres 1 et β et $M = \max(1,\beta)$ le plus grand de ces nombres.

On considère la suite $V = (v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $v_0 = 0$, $v_1 = \beta$ et, pour tout n positif, la relation

$$v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$$

1. Montrer, pour tout n strictement positif, l'inégalité : $m \leq v_n < 4M$.

2. Montrer que si la suite V admet une limite, cette limite est nécessairement égale à 4.

   On se propose de montrer que, pour tout β strictement positif, la suite V admet effectivement pour limite 4.

3. Montrer, pour tout n positif, l'inégalité

$$|v_{n+2} - 4| \leq \frac{|v_{n+1} - 4|}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{|v_n - 4|}{\sqrt{v_n} + 2}$$

4. On pose $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{m} + 2}$ et on considère la suite $U = (u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$ et les conditions initiales $u_0 = |v_1 - 4|$ et $u_1 = |v_2 - 4|$. Montrer que, pour tout n strictement positif, $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$.

5. En conclusion, montrer à l'aide des résultats de la première partie que la suite V converge vers 4.

6. Écrire un programme Turbo-Pascal qui lise un entier N et un réel β et qui affiche, en sortie, les N premiers termes de la suite V.

EXERCICE III

Sachant qu'un appareil a fonctionné correctement pendant une certaine durée x, on s'intéresse à la probabilité pour qu'il continue à bien fonctionner pendant encore au moins une durée y. Pour cela on convient de représenter la durée de vie de ce type d'appareil par une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé dont on notera la probabilité $\mathbf{P}$. L'exercice a pour objet l'étude de quelques fonctions liées à cette durée de vie.

I. On suppose d'abord que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n)$ n'est pas nul. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$p_n = \mathbf{P}(X = n), \quad G_n = \mathbf{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{p_n}{G_n}$$

1. Justifier les inégalités $0 < p_n < G_n < 1$ et $0 < Z_n < 1$.

2. Soit n un entier naturel. Établir l'égalité $\mathbf{P}(X \geq n+1 \,/\, X \geq n) = 1 - Z_n$.

3. **a)** Montrer que la suite $\left(\mathbf{P}(X \geq n+1 \,/\, X \geq n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante si et seulement si la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

   b) Vérifier que les conditions précédentes sont réalisées dans le cas où la loi de X est une loi géométrique.

   c) Réciproquement, on suppose qu'il existe une constante p appartenant à $]0,1[$ telle que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la suite constante égale à p. Montrer par récurrence que X suit une loi géométrique.

4. Montrer que si, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{p_{n+m}}{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, alors la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $\left(\mathbf{P}(X \geq n+1 \,/\, X \geq n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. (On dit alors qu'il y a vieillissement de l'appareil dont X est la durée de vie.)

II. On suppose maintenant que la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et admet une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose, pour tout réel strictement positif x,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad Z(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$$

1. **a)** Si x et y sont des réels strictement positifs, on pose $H(x,y) = \dfrac{G(x+y)}{G(x)}$. Montrer que l'on a alors, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}_+^*$, l'égalité :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{G(x+y)}{G(x)}\left(Z(x) - Z(x+y)\right)$$

   b) Montrer que la fonction $x \mapsto Z(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si, pour tout réel y strictement positif fixé, la fonction $x \mapsto \mathbf{P}(X \geq x + y \,/\, X \geq x)$ est une fonction décroissante.

2. **a)** Montrer que si la loi de X est une loi exponentielle, alors la fonction Z est constante.

   b) Réciproquement, montrer que si Z est la fonction constante égale au réel strictement positif λ, alors la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}G(x)$ est constante. Quelle est alors la loi de X ?

Introduction et commentaire

Classique avec une touche d'originalité, difficile et long, tel nous apparaît le cru 2000 de Math–III option économique de l'ESCP-EAP.

Exercice–1

Il est classique dans son contenu, un peu original car on ne demande pas de trouver les valeurs propres (pivot de Gauss ...), mais de vérifier que telle valeur est valeur propre ... ce qui n'est pas la même chose ; les calculs en sont donc plus simples. Une autre originalité : la restriction de Φ_α à un sous-espace stable par Φ. C'est une situation assez rarement étudiée, qui a donc surpris bon nombre d'étudiants.

Exercice–2

La partie–1 de cet exercice est difficile. Les étudiants ont du mal à manier les vecteurs et les espaces vectoriels, plus encore quand il s'agit d'espaces vectoriels de fonctions ; que dire quand il s'agit d'espaces vectoriels de suites numériques !

La partie–2 est difficile également pour le maniement des inégalités - les inégalités posent toujours des problèmes - et intéressante : elle étudie une suite qui n'a rien de classique à l'aide des résultats sur les suites doublement récurrentes de la première partie.

Exercice–3

Malgré l'introduction, cet exercice reste théorique et devenait difficile dès la question–4 de la partie–1. Le mélange fonctions de deux variables et d'une variable n'a pas beaucoup inspiré les étudiants.

Corrigé de l'épreuve

Exercice–1

1–a) 1 est une valeur propre de A_α si et seulement si la matrice $A_\alpha - I_3$ n'est pas inversible.

$$A_\alpha - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$; on obtient la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La dernière ligne est nulle ; la matrice $A_\alpha - I_3$ n'est pas inversible.

$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A_\alpha.}$

1– b) Un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre 1 si et seulement si $A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Or

$$A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x \qquad - \alpha z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha(x+z) = 0. \end{cases}$$

<u>1 $^{\text{er}}$ cas : $\alpha = 0$.</u>

Le système précédent devient $x - y = 0$. Le sous-espace propre est alors :

$$\begin{aligned} E_1(0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0\} \\ &= \{(x, x, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,1,0) + z(0,0,1) \ / \ (x, z) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(0) = \text{vect}\big((1,1,0), (0,0,1)\big)}$$

Les deux vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$ forment une famille génératrice de $E_1(0)$. De plus, ils ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une famille libre, donc une base de $E_1(0)$.

<u>2 $^{\text{ème}}$ cas : $\alpha \neq 0$.</u>

Le système devient

$$\begin{cases} 2x + (\alpha-2)y - \alpha z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \text{Système qui équivaut à} \qquad \begin{cases} (2-\alpha)(x-y) = 0 \\ z = -x. \end{cases}$$

- <u>Si $\alpha = 2$.</u>

Le système devient $z = -x$.

$$\begin{aligned} E_1(2) &= \{(x, y, -x) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,-1) + y(0,1,0) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(2) = \text{vect}\big((1,0,-1), (0,1,0)\big)}$$

Les deux vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,0)$ forment une famille génératrice de $E_1(2)$. De plus, ils ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une famille libre, donc une base de $E_1(2)$.

- <u>Si $\alpha \neq 2$ (et $\alpha \neq 0$)</u>

Le système devient $\begin{cases} z = -x \\ y = x. \end{cases}$

$$\boxed{E_1(\alpha) = \text{vect}\big((1,1,-1)\big).}$$

2–a) f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires ; ils forment une famille libre,

donc $\boxed{\text{une base de } F_1.}$

2–b) Il suffit de montrer que $\Phi_\alpha(f_1) \in F_1$ et $\Phi_\alpha(f_2) \in F_1$. En effet

$\forall f \in F_1 = \text{vect}(f_1, f_2),\ \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f = af_1 + bf_2.$

Donc, par linéarité, $\Phi_\alpha(f) = a\Phi_\alpha(f_1) + b\Phi_\alpha(f_2) \in F_1$, car, F_1 étant un sous-espace vectoriel, F_1 est stable par combinaisons linéaires.

On a donc bien $\forall f \in F_1,\ \Phi_\alpha(f) \in F_1$.

Calculons $\Phi_\alpha(f_1)$.

$$A_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi_\alpha(f_1) = f_1$.

Remarque : on aurait pu éviter ce calcul, car $f_1 \in E_1(1)$.

Calculons $\Phi_\alpha(f_2)$.

$$A_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\alpha \\ -2-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \Phi_\alpha(f_2) = f_2 + \alpha f_1.$$

Conclusion : $\Phi_\alpha(f_1) \in F_1$ et $\Phi_\alpha(f_2) \in F_1$.

$$\boxed{F_1 \text{ est stable par } \Phi_\alpha.}$$

2 c)

$\hat{\Phi}_\alpha(f_1) = \Phi_\alpha(f_1) = f_1$

$\hat{\Phi}_\alpha(f_2) = \Phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2$.

La matrice de $\hat{\Phi}_\alpha$ dans la base $f_1, f_2)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $\alpha - 1$ est valeur propre de Φ_α si et seulement si la matrice $A_\alpha - (\alpha-1)I_3$ n'est pas inversible.

$A_\alpha - (\alpha-1)I_3 = \begin{pmatrix} -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ 2 & \alpha & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$; la matrice devient

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La deuxième ligne est nulle ; la matrice $A_\alpha - (\alpha-1)I_3$ n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\alpha - 1 \text{ est valeur propre de } A_\alpha.}$$

(x, y, z) appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre $\alpha - 1$ si et seulement si $\left(A_\alpha - (\alpha-1)I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette égalité vectorielle équivaut au système

$$\begin{cases} -\alpha x - (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ (2-\alpha)(x+z) = 0 \end{cases}$$

on a effectué $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$

$$\iff \begin{cases} (2-\alpha)y - \alpha(x-z) = 0 \\ (2-\alpha)(x+z) = 0. \end{cases}$$

Remarquons que $(1, 0, -1)$ vérifie ce système pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous prendrons donc $\boxed{f_3 = (1, 0, -1).}$

4 a) Ecrivons la matrice M des coordonnées en colonne de (f_1, f_2, f_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ On effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$. On obtient

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ On effectue alors $L_2 \longleftrightarrow L_3$; cela donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, aucun de ses pivots n'est nul ; elle est inversible. Donc la matrice M est inversible aussi.

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Or on sait que $\Phi_\alpha(f_1) = f_1$ et $\Phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2$ d'après **2– b)** et $\Phi_\alpha(f_3) = (\alpha-1)f_3$ d'après **3)**. La matrice de Φ_α dans la base (f_1, f_2, f_3) est donc

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

4–b) Φ_α a donc pour valeurs propres 1 et $\alpha - 1$; elles sont distinctes si et seulement si $\alpha \neq 2$.

- <u>Si $\alpha = 2$.</u>

$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1 est la seule valeur propre.

Si B_2 était diagonalisable, il existerait une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, telle que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}B_2P$. Ce qui équivaut, en multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P à $B_2 = PI_3P^{-1} = I_3$. Or $B_2 \neq I_3$. Donc

$$\boxed{B_2 \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- <u>Si $\alpha \neq 2$.</u>

$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$ et Φ_α a deux valeurs propres distinctes 1 et $\alpha - 1$.

Φ_α est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{\alpha-1}(\alpha) + \dim E_1(\alpha) = 3$.

D'après la question **3)**, pour $\alpha \neq 2$, on avait obtenu

$$(x,y,z) \in E_{\alpha-1}(\alpha) \iff \begin{cases} (2-\alpha)y - \alpha(x+z) &= 0 \\ (2-\alpha)(x+z) &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2-\alpha)y - \alpha(x+z) &= 0 \\ x+z &= 0 \quad \text{car } \alpha \neq 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2-\alpha)y &= 0 \\ x+z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= 0 \\ x+z &= 0 \quad \text{car } \alpha \neq 2 \end{cases}$$

Donc $E_{\alpha-1}(\alpha) = \text{vect}(f_3)$ et $\dim E_{\alpha-1}(\alpha) = 1$.

Φ_α est donc diagonalisable si et seulement si $\dim E_{\alpha-1}(\alpha) = 2$. D'après la question **1)**, cela est équivalent à $\alpha = 0$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \Phi_\alpha \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha = 0.}$

Exercice – 2

Partie – I :

1) Les suites de $\mathcal{E}$ vérifient une relation de récurrence linéaire double. L'équation caractéristique est $x^2 - \alpha x - \alpha = 0$. Le discriminant est

$\Delta = \alpha^2 + 4\alpha > 0$ car $\alpha > 0$. L'équation a donc deux racines réelles distinctes :

$$r = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \; ; \; s = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} \; ; \; r < s.$$

Si l'on considère les deux suites $R = (r^n)$ et $S = (s^n)$, on sait d'après le cours que $\mathcal{E} = \text{vect}(R, S)$.

- on a $s > 0$, donc $|s| = s$.
-

$$\begin{aligned} r^2 - s^2 &= \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + \Delta - 2\alpha\sqrt{\Delta} - \alpha^2 - \Delta - 2\alpha\sqrt{\Delta}\right) \\ &= -\alpha\sqrt{\Delta} < 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } r^2 < s^2 \iff |r| < |s|.}$

2) $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_n = ar^n + bs^n$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b &= u_0 \\ ar + bs &= u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b &= u_0 \\ b(s-r) &= u_1 - ru_0. \end{cases}$$

On effectué $L_2 \leftarrow L_2 - rL_1$. Finalement

$$\boxed{a = \frac{su_0 - u_1}{s-r} \text{ et } b = \frac{u_1 - ru_0}{s-r}.}$$

3–a) Rappelons que $s = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2}$.

- Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $|s| = s = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2} < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + 2}\right)$.

Donc $|s| < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{9}{4}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |s^n| = \lim\limits_{n \to +\infty} s^n = 0$.

Or $0 < |r| < |s| \Longrightarrow 0 < |r|^n < |s|^n$, soit

$0 < |r^n| < |s^n|$. Le théorème d'encadrement permet de conclure que

$\lim\limits_{n \to +\infty} |r^n| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} r^n = 0$. Par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} (ar^n + bs^n) = 0$.

$\boxed{\text{Pour } 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}, \text{ la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$

3 **b)** Rappelons que $a = \frac{su_0 - u_1}{s - r}$ et $b = \frac{u_1 - ru_0}{s - r}$.

Par hypothèse, $u_1 - ru_0 \neq 0$, donc $b \neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = ar^n + bs^n = bs^n\left(\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right).$$

Mais $\left|\frac{r}{s}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right) = 1$.

Ceci implique $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq n_0\ \left(\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right) \geq \frac{1}{2} > 0$.

Pour $n \geq n_0$, u_n est du signe $bs^n = \frac{u_1 - ru_0}{s - r}s^n$, donc du signe de $u_1 - ru_0$ puisque $\frac{s^n}{s - r} > 0$.

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq n_0\ u_n \text{ ne s'annule pas et garde un signe constant.}}$$

Pour $n \geq n_0$, $u_n \neq 0 \longrightarrow |u_n| > 0$. On peut donc prendre le $\ln$.

$$\ln|u_n| = \ln|b| + n\ln|s| + \ln\left|\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right|$$

$$\frac{1}{n}\ln|u_n| = \frac{\ln|b|}{n} + \ln|s| + \frac{\ln\left|\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right|}{n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|b|}{n} = 0.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right| = 1$, donc par continuité de la fonction ln, on déduit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left|\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right| = 0$, par suite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln\left|\frac{a}{b}\left(\frac{r}{s}\right)^n + 1\right|}{n}\right) = 0.$$

> Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n} = \ln|s|$; or $|s| < 1$, donc $\ln|s| \neq 0$.
> Ce qui permet de dire que $\ln|u_n| \underset{\infty}{\sim} n\ln|s|$.

3–c) Si $u_1 - ru_0 = 0$, alors $b = 0$ et $u_n = ar^n$.

La suite (u_n) n'est pas la suite nulle si et seulement si $a \neq 0 \Longleftrightarrow su_0 - u_1 \neq 0$.

Or $r < 0$, car $\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} > \alpha$, donc r^n et r^{n+1} sont de signes contraires.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ et } u_{n+1} \text{ sont de signes contraires.}}$$

$$\ln|u_n| = \ln|a| + n\ln|r|$$

$$\frac{\ln|u_n|}{n} = \frac{1}{n}\ln|a| + \ln|r|.$$

> Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n} = \ln|r|$; or $|r| < |s| < 1$, donc $\ln|r| \neq 0$.
> Ce qui permet de dire $\ln|u_n| \underset{\infty}{\sim} n\ln|r|$.

4) Ecrivons $u_n = \frac{s^n}{s - r}\left((su_0 - u_1)\left(\frac{r}{s}\right)^n + u_1 - ru_0\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left((su_0 - u_1)\left(\frac{r}{s}\right)^n + u_1 - ru_0\right) = u_1 - ru_0$ car $\left|\frac{r}{s}\right| < 1$.

- Si $u_1 - ru_0 \neq 0$.

On a $\alpha > \frac{1}{2}$, donc $s = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2}\right) = 1$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s^n}{s - r} = +\infty$;

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty \text{ ; la suite } (u_n) \text{ n'est pas bornée}}$$

- Si $u_1 - ru_0 = 0$. Alors $u_1 = ru_0$ et $su_0 - u_1 = (s - r)u_0$.

Dans ce cas, $u_n = u_0 r^n$. Montrons que la suite (r^n) est bornée.

$$|r| = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} - \alpha}{2} = \frac{4\alpha}{2(\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} + \alpha)} \quad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$|r| < \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2} + \alpha} \quad (\text{car } \alpha > 0)$$

$$|r| < \frac{2\alpha}{\alpha + \alpha} \quad (\text{car } \alpha > 0)$$

$$|r| < \frac{2\alpha}{2\alpha} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Conclusion (u_n) est bornée.

Cela signifie que l'ensemble des suites bornées de $\mathcal{E}$ est $\{(u_0 r^n)\ /\ u_0 \in \mathbb{R}\}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des suites bornées de } \mathcal{E} \text{ est } \mathrm{vect}(R) \text{ ; } \dim \mathrm{vect}(R) = 1.}$$

Partie–II

1) Raisonnons par récurrence.

Initialisation :

$n = 1$, $v_1 = \beta$, $m \leq \beta \leq M$, donc $m \leq \beta \leq 4M$.

$n = 2$, $v_2 = \sqrt{\beta}$.

- **Si** $\beta < 1$.

Dans ce cas, $m = \beta$ et $M = 1$. Donc on a

$0 < \beta < \sqrt{\beta} < 1$ et $m \leq v_2 \leq M < 4M$.

- **Si** $\beta \geq 1$.

Dans ce cas, $m = 1$ et $M = \beta$. On a donc

$1 < \sqrt{\beta} \leq \beta \leq M < 4M$. Comme $v_2 = \sqrt{\beta}$, on a $m \leq v_2 \leq 4M$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n - 1$. Alors

$$\begin{cases} m \leq v_n \leq 4M \\ m \leq v_{n+1} \leq 4M \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m} \leq \sqrt{v_n} \leq \sqrt{4M} \\ \sqrt{m} \leq \sqrt{v_{n-1}} \leq \sqrt{4M} \end{cases}$$

Donc en ajoutant membre à membre les deux encadrements,

$2\sqrt{m} \leq \sqrt{v_n} + \sqrt{v_{n+1}} \leq 2\sqrt{4M} - 4\sqrt{M}$; soit

$2\sqrt{m} \leq v_{n+2} \leq 4\sqrt{M}$

Or $m \leq 1$, donc $m \leq \sqrt{m}$ et $M \geq 1$, donc $\sqrt{M} \leq M$.

On obtient finalement, $2m \leq 2\sqrt{m} \leq v_{n+2} \leq 4\sqrt{M} \leq 4M$. Mais $m \leq 2m$, donc

$$\boxed{m \leq v_{n+2} \leq 4M.}$$

Conclusion : D'après le principe de raisonnement par récurrence, on conclut que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \Longrightarrow \ell \geq 0$, car $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq 0$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+2} = \ell$.

En passant à la limite dans la relation $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$, on obtient, par continuité de la fonction racine au point ℓ : $\ell = 2\sqrt{\ell}$. Cette égalité équivaut à $\ell^2 = 4\ell$, soit $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.

Or $m \leq v_n$, avec $m = 1$ ou $m = \beta > 0$, donc la seule solution est $\boxed{\ell = 4.}$

3)

$$\begin{aligned} v_{n+2} - 4 &= \sqrt{v_{n+1}} - 2 + \sqrt{v_n} - 2 \\ &= \frac{v_{n+1} - 4}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{v_n - 4}{\sqrt{v_n} + 2}. \end{aligned}$$

(On a utilisé les expressions conjuguées).

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\boxed{|v_{n+2} - 4| \leq \left|\frac{v_{n+1} - 4}{\sqrt{v_{n+1}} + 2}\right| + \left|\frac{v_n - 4}{\sqrt{v_n} + 2}\right|.}$$

4) Faisons un raisonnement par récurrence.

Initialisation :

Pour $n = 1$: $|v_1 - 4| = u_0$, donc l'inégalité $|v_1 - 4| \leq u_0$ est réalisée.

Pour $n = 2$: $|v_2 - 4| = u_1$, donc l'inégalité $|v_2 - 4| \leq u_1$ est réalisée.

Hérédité :

Supposons l'inégalité vérifiée aux rangs n et $n+1$, avec $n > 0$.

$$\begin{aligned} |v_{n+2} - 4| &\leq \left|\frac{v_{n+1} - 4}{\sqrt{v_{n+1}} + 2}\right| + \left|\frac{v_n - 4}{\sqrt{v_n} + 2}\right| && \text{d'après 3)} \\ &\leq \frac{u_n}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{v_n} + 2} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{u_n}{\sqrt{m} + 2} + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{m} + 2}. \end{aligned}$$

Car

$0 < \sqrt{m} \leq \sqrt{v_{n+1}}$ et $0 < \sqrt{m} \leq \sqrt{v_n}$, donc

$2 < \sqrt{m} + 2 \leq \sqrt{v_{n+1}} + 2$ et $2 < \sqrt{m} + 2 \leq \sqrt{v_n} + 2$;

On peut passer aux inverses car les nombres sont strictement positifs.

$0 < \dfrac{1}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{m} + 2}$ et $0 < \dfrac{1}{\sqrt{v_n} + 2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{m} + 2}$.

Puis on multiplie ces inégalités respectivement par u_n et u_{n+1} qui sont positifs. En posant $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{m} + 2}$, on obtient

$|v_{n+2} - 4| \leq \alpha(u_n + u_{n-1})$, c'est-à-dire $|v_{n+2} - 4| \leq u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{En conclusion, } \forall n \geq 1,\ |v_n - 4| \leq u_{n-1}.}$$

5) $\sqrt{m} > 0 \Longrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$. D'après **I 3–a)**, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - 4| = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 4.}$$

6)

```
Program ESCP ;
var     n, i  : INTEGER ;
        b, y, v  : real ;

BEGIN
u := 0 ; v := b ; writeln('u=',u,'v='v) ;
     FOR i := 2 TO n DO
                 BEGIN
x := √u + √v ; u := v ; v := x ;
                 END ;
END.
```

Exercice–3

Partie–I

1) $\forall n \geq 1,\ p_n > 0$, donc $G_n = p_n + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} p_k > p_n$.

De plus $G_n \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$. On peut donc écrire :

$$\boxed{0 < p_n < G_n \leq 1.}$$

$0 < p_n < G_n \Longrightarrow 0 < \dfrac{p_n}{G_n} < 1$ (on a divisé par $G_n > 0$).

$$\boxed{0 < Z_n < 1.}$$

2)

$$P\left(X \geq n+1 / X \geq n\right) = \frac{P\left((X \geq n+1) \cap (X \geq n)\right)}{P(X \geq n)} = \frac{P(X \geq n+1)}{P(X \geq n)} = \frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{G_n - p_n}{G_n}.$$

$$\boxed{\text{Donc } P\left(X \geq n+1 / X \geq n\right) = 1 - Z_n.}$$

3–a)

$$\boxed{(Z_n) \text{ est constante si et seulement si } (1 - Z_n) \text{ est constante.}}$$

3–b) Supposons que X suive la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $p \in]0;1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = pq^{n-1}$, où $q = 1 - p$.

G_n est la probabilité de n'avoir obtenu que des échecs au cours des $n-1$ premiers tirages ; donc $G_n = q^{n-1}$. Par suite

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = p.}$$

3–c) Si, pour tout $n \geq 1$, $Z_n = p$. $(p \in]0;1[)$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = (1-p)^{n-1}p$.

Initialisation :

Pour $n = 1$, $Z_1 = p = (1-p)^{1-1}p$.

Hérédité :

Supposons que $\forall k \in [1;n]$, $p_k = (1-p)^{k-1}p$.

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= Z_{n+1} \times G_{n+1} \\
&= p \times P(X \geq n+1) \\
&= p\left(1 - P(X \leq n)\right) \\
&= p \times P\left(1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(X = k)\right)\right) \\
&= p\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)
\end{aligned}$$

(car les événements $(X = k)$ sont 2 à 2 incompatibles)

$$= p\left(1 - p\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}\right)$$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

$$\begin{aligned}
&= p\left(1 - p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\right) \\
&= p\left(1 - (1 - (1-p)^n)\right) \\
&= p(1-p)^n.
\end{aligned}$$

Par principe de récurrence, la relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Si } \forall n \geq 1,\ Z_n = p, \text{ alors } X \text{ suit la loi géométrique sur } \mathbb{N}^*, \text{ de paramètre } p.}$$

4)

$$\forall n \geq 1,\quad Z_{n-1} = \frac{1}{\frac{G_{n-1}}{p_{n-1}}} = \frac{1}{1 + \sum_{m \geq 1} \frac{p_{m+n-1}}{p_{n-1}}}$$

$$Z_n = \frac{1}{\frac{G_n}{p_n}} = \frac{1}{1 + \sum_{m \geq 1} \frac{p_{n+m}}{p_n}}.$$

Mais $\forall m \geq 1$, $\frac{p_{n-1+m}}{p_{n-1}} \leq \frac{p_{n+m}}{p_n}$, donc $\sum_{m \geq 1} \frac{p_{n-1+m}}{p_{n-1}} \leq \sum_{m \geq 1} \frac{p_{n+m}}{p_n}$.

On ajoute 1 de chaque coté et on passe aux inverses (il s'agit de nombres strictement positifs).

Ce qui donne $0 < \frac{G_{n-1}}{p_{n-1}} \leq \frac{G_n}{p_n}$, donc $Z_{n-1} \geq Z_n$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (Z_n) \text{ est croissante. Donc la suite} \\ (1 - Z_n) = \left(P(X \geq n+1 / X \geq n)\right) \text{ est décroissante.}\end{array}}$$

Partie II

1–a) On dérive la fraction $\frac{G(x+y)}{G(x)}$ par rapport à la variable x. On trouve

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x+y) \cdot G(x) - G(x+y) \cdot G'(x)}{(G(x))^2}$$ formule du type $\frac{vu' - uv'}{v^2}$.

Désignons par F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (elle existe car f est continue sur cet intervalle).

$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt = \lim_{u \to +\infty} F(u) - F(x) = L - F(x)$; $L \in \mathbb{R}$ car l'intégrale est convergente.

Donc $G'(x) = -F'(x) = -f(x)$.

De même $G(x+y) = L - F(x+y)$, donc $\frac{\partial G(x+y)}{\partial x} = -\frac{\partial F(x+y)}{\partial x} = -f(x+y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) &= \frac{-f(x+y).G(x) + f(x).G(x+y)}{(G(x))^2} \\
&= \frac{G(x+y)}{G(x)} \cdot \left(\frac{f(x)}{G(x)} - \frac{f(x+y)}{G(x+y)}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{G(x+y)}{G(x)}\left(Z(x) - Z(x+y)\right).}$$

1–b) Z est croissante équivaut successivement à :

$\forall y > 0$, $Z(x+y) \geq Z(x)$;

$\forall y > 0$, $\frac{G(x+y)}{G(x)}\left(Z(x) - Z(x+y)\right) \leq 0$, car $\frac{G(x+y)}{G(x)} > 0$.

$\forall y > 0,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \leq 0$;

$\forall y > 0,\ x \longmapsto \frac{G(x-y)}{G(x)}$ décroît. Mais

$$\begin{aligned} P(X \geq x - y / X \geq x) &= \frac{P\Big((X \geq x+y) \cap (X \geq x)\Big)}{P(X \geq x)} \\ &= \frac{P(X \geq x + y)}{P(X \geq x)} \\ &= \frac{G(x+y)}{G(x)}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } Z \text{ est croissante si et seulement si } \forall y > 0,\ x \longrightarrow P(X \geq x+y / X \geq x) \text{ est décroissante.}}$

2–a) Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ f(x) &= \lambda \exp(-\lambda x). \\ G(x) &= \int_x^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda t)\,dt \\ &= \lim_{u \to +\infty} \left[-\exp(-\lambda t)\right]_x^u \\ &= \exp(-\lambda x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } Z(x) = \lambda.}$$

2–b) Supposons Z constante et égale à λ.

$$\begin{aligned} & \forall x > 0,\ \frac{f(x)}{G(x)} = \lambda \\ \iff & \forall x > 0,\ \frac{-G'(x)}{G(x)} = \lambda \quad \text{, car d'après } \mathbf{II\text{–}1\text{–}a)}\ G'(x) = -f(x). \\ \iff & \forall x > 0,\ \lambda G(x) + G'(x) = 0 \\ \iff & \forall x > 0,\ \exp(\lambda x)(\lambda G(x) + G'(x)) = 0 \\ \iff & \forall x > 0,\ \varphi'(x) = 0, \quad \text{avec } \varphi(x) = \exp(\lambda x) G(x) \\ \iff & \varphi \ \text{ est constante.} \end{aligned}$$

Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0,\ \exp(\lambda x) G(x) = k$, soit

$G(x) = k \exp(-\lambda x)$.

Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = P(X \geq 0) = 1$, donc en passant à la limite dans l'espression de G, on trouve $k = 1$.

Conclusion :

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ G(x) &= \exp(-\lambda x) \\ \forall x > 0,\ G'(x) &= -\lambda \exp(-\lambda x) \\ \forall x > 0,\ f(x) &= \lambda \exp(-\lambda x) \end{aligned}$$

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$$

J.M - M. M.

Référence