Mathématiques

Petite leçon particulière d'algèbre bilinéaire et de polynômes

Tran Van Hiep
Professeur de mathématiques en classes préparatoires, IPESUP (Paris).

Conçue comme une véritable leçon particulière avec rappel de cours et méthodologie, je vous propose une petite anthologie des thèmes d'Algèbre bilinéaire et polynômes souvent posés aux concours depuis les dernières années. Ils vous aideront à mieux cerner votre cours d'Algèbre et à bien préparer vos révisions.

Commençons par un extrait d'un sujet d'écrit de concours récent :

Leçon 1

E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré $\leqslant n-1$.

On désigne par $\vec{e}_i$ le monôme X^{i-1}, où $i \in [\![1,n]\!]$, rappelons que $(\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base canonique de E_n.

1 Montrer que

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

définit un produit scalaire sur E. En déduire que $E_n, \langle , \rangle$ est un espace euclidien.

On notera $\| \ \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$.

2 Soit la matrice carrée d'ordre n, $H_n = (h_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont les coefficients h_{ij} sont définis par :

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

Montrer que H_n est diagonalisable.

3 Si $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \vec{e}_k$ et $Q(X) = \sum_{k=1}^{n} b_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} b_k \vec{e}_k$ sont deux polynômes de E_n. On désigne par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Référence
Numéro 27 • Janvier 2002

les matrices colonnes représentant les coordonnées de P et de Q dans la base $(\vec{e}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E_n. On dit que P est le polynôme associé à A.

Montrer que $\langle P,Q\rangle = {}^tAH_nB$.

4 En déduire que les valeurs propres de H_n sont strictement positives. La matrice H_n est-elle inversible ?

5 Pour tout $f \in E$, on pose $\beta_i = \langle \vec{e}_i, f\rangle$ et on considère B et A_0 définies par

$$B = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix} \quad , \quad A_0 = H_n^{-1}B$$

On pose $A = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$. On définit en outre $P_0(X)$ par $P_0(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k X^{k-1}$, qui n'est autre que le polynôme associé à A_0.

Soit $d : E_n \to \mathbb{R}^+$ définie par $d(P) = \|P - f\|$.

6 Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \langle \vec{e}_k, P_0 - f\rangle = 0$. En déduire que $\forall Q \in E_n, \langle Q, P_0 - f\rangle = 0$.

7 Montrer que $\forall P \in E_n, \quad \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$.

8 Montrer que d admet un minimum et qu'il est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

9 Montrer que $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

Vous avez montré dans la question 4, que les valeurs propres de toute matrice d'un produit scalaire sont strictement positives.

Le but des questions qui suivent est de montrer que, quelle que soit la matrice ***symétrique*** $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont les valeurs propres sont ***strictement positives***, il existe n vecteurs libres $(\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E_n tels que $b_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle$.

10 Soit φ un ***endomorphisme symétrique*** de l'espace euclidien $(E_n, \langle,\rangle)$. On suppose que les valeurs propres de φ sont ***strictement positives***.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Rappelons que $\vec{e}_i = X^{i-1}$, où $1 \leqslant i \leqslant n$. $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base canonique de E_n.

Soit M la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (X^{i-1})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Que pouvez-vous dire de la matrice M ?

11 Soit $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de E_n. Soit B la matrice de φ dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Quelle est la nature de B ?

12 Montrer qu'il existe une une matrice orthogonale P, et une matrice diagonale D telles que $B = PD\,{}^tP$.

13 Soit Δ une matrice diagonale n'ayant que des valeurs propres positives telle que $\Delta^2 = D$. Soit g l'endomorphisme de E_n dont la matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est $P\Delta\,{}^tP$.

Montrer que g est un endomorphisme symétrique.

14 Donner une relation liant φ et g.

15 On pose $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\vec{v}_i = g(\vec{e}_i)$. Montrer que la famille $(\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ répond au problème, c'est-à-dire que $b_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle$.

Solution

1 Tout d'abord, il ne faut pas rater cette question basique, ce serait très mal vu !

- Symétrie : $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \langle g,f\rangle$
- Bilinéarité :

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\rangle = \int_0^1 (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)g(t)\,dt = \alpha_1\int_0^1 f_1 g(t)\,dt + \alpha_2\int_0^1 f_2 g(t)\,dt = \alpha_1\langle f_1,g\rangle + \alpha_2\langle f_2,g\rangle$$

La linéarité de $\langle,\rangle$ par rapport à g découle de sa symétrie.

- Positivité : $\langle f,f\rangle = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt \geqslant 0$, car l'intégrale d'une fonction ***positive*** est positive ***les bornes étant dans le bon sens*** (*ce passage est à souligner pour la démonstration*).

- Définition : soit $f \in E$ telle que $\langle f,f\rangle = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$. L'intégrale d'une fonction ***positive*** et ***continue*** est nulle si, et seulement si, $\forall t \in [0,1], f^2(t) = 0$, c'est-à-dire que $f = 0$

(*Là aussi il faut bien mentionner la positivité et la continuité, sans elles, on ne peut pas affirmer que* $f = 0$).

En résumé, $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur E donc sur E_n aussi.

L'espace vectoriel E_n étant de ***dimension finie***, le couple $(E_n, \langle,\rangle)$ est un ***espace euclidien***.

2 **Méthode :**

► ***À retenir*** : Nous sommes en algèbre bilinéaire, pensez à la ***symétrie*** de la matrice.

Comme

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1} = \frac{1}{j+i-1} = h_{ji},$$

La matrice H_n est ***symétrique réelle***, elle est diagonalisable.

3 **Rappel de cours :**

► ***À retenir*** : Rappelons que la matrice du produit scalaire $\langle , \rangle$ dans une base $\mathcal{B}$ est matrice *symétrique réelle* $A = (a_{ij})$ dont les coefficients sont définis par

$$\boxed{a_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont les matrices-colonnes représentant les coordonnées des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = {}^tXAY = {}^tYAX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Dans ces conditions, comme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sont les matrices colonnes représentant les coordonnées de P et de Q dans la base $(\vec{e}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E_n, montrer que $\langle P, Q \rangle = {}^tAH_nB$ équivaut à montrer que H_n est la ***matrice*** du produit scalaire $\langle , \rangle$ dans la base $(\vec{e}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

Pour celà, calculons $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$,

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \int_0^1 x^{i-1} x^{j-1} dx = \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \left[\frac{x^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+j-1}$$

C'est bien l'expression de h_{ij} que nous obtenons, *i.e.*,

$$\boxed{h_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle}$$

D'après mon rappel de cours, H_n est bien est la ***matrice*** du produit scalaire $\langle , \rangle$ dans la base $(\vec{e}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Par conséquent, nous avons le droit d'écrire :

$$\boxed{\langle P, Q \rangle = {}^tAH_nB}$$

4 Cette question est vraiment très importante. Suivez mon raisonnement et retenez-le bien.

► ***À retenir*** : La ***positivité*** des ***valeurs propres*** de la matrice d'un produit scalaire est une conséquence de la positivité du produit scalaire. Alors que leur ***non nullité*** vient de la définition du produit scalaire.

Soit λ une valeur propre de H_n, il existe une matrice colonne non nulle $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ telle que $H_nA = \lambda A_n$.

Soit P le polynôme associé à A, *i.e.* $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \vec{e}_k$.

► Appliquons maintenant la ***positivité*** du ***produit scalaire*** et l'égalité $\langle P, Q \rangle = {}^tAH_nB$ que nous venons de prouver, en remplaçant Q par P, nous obtenons

$$\langle P, P \rangle = {}^tA \underbrace{H_nA}_{\lambda A} = {}^tA\lambda A = \lambda\, {}^tAA = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2. \qquad (*)$$

Comme $\langle P, P \rangle \geqslant 0$, à son tour $\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant 0$, donc $\lambda \geqslant 0$.

Mais λ ne peut être nul, car si c'était le cas, vu $(*)$ on aurait $\langle P, P \rangle = 0$. La définition du produit scalaire impliquerait alors $P = 0$, c'est-à-dire que $A = 0$. Mais $A \neq 0$, car c'est un *vecteur propre* ! En résumé, nous venons d'établir une propriété très importante :

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de la matrice d'un produit scalaire sont } > 0}$$

Rappel de cours :

► ***À retenir*** : **Caractérisation des valeurs propres.**
Dire que λ est une valeur propre de H équivaut à dire que $H - \lambda I$ n'est pas inversible.

Comme 0 n'est pas une valeur propre de H_n, la matrice $H_n - 0I$, c'est-à-dire H_n, est inversible !

5 Pour calculer $\langle \vec{e}_k, P_0 - f \rangle$ commençons par revenir à la définition de P_0 et utilisons la bilinéarité de $\langle , \rangle$ (retenons que le sujet définit β_k par la relation $\langle \vec{e}_k, f \rangle = \beta_k$),

$$\langle \vec{e}_k, P_0 - f \rangle = \langle \vec{e}_k, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i - f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{e}_k, \vec{e}_i \rangle - \langle \vec{e}_k, f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{e}_k, \vec{e}_i \rangle - \beta_k$$

Rappelons également que $h_{ki} = \langle \vec{e}_k, \vec{e}_i \rangle$. Par conséquent,

$$\langle \vec{e}_k, P_0 - f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_{ki} - \beta_k$$

► Donc montrer que $\langle \vec{e}_k, P_0 - f \rangle = 0$ revient à montrer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \beta_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_{ki}. \qquad (**)$$

• Relisons la question 3, nous voyons que β_k vient de $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et α_i de $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = H_n^{-1}B$. En multipliant à gauche cette dernière égalité par H_n, nous déduisons que $H_nA_0 = B$. Détaillons ce dernier produit matriciel,

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

nous obtenons

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}\alpha_i$$

$$\vdots$$

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{n} h_{ki}\alpha_i$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n} h_{ni}\alpha_i$$

Et ces égalités sont exactement celles $(**)$ que nous voulons montrer. En résumé,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \langle \vec{e}_k, P_0 - f \rangle = 0}$$

L'égalité précédente signifie que $P_0 - f$ est ***orthogonal*** à une ***base*** de E_n, donc nous pouvons affirmer que

$$\boxed{P_0 - f \text{ est } \textbf{\textit{orthogonal}} \text{ à } E_n}$$

Ce qui revient à dire que

$$\boxed{\forall Q \in E_n, P_0 - f \text{ est } \textbf{\textit{orthogonal}} \text{ à } Q \iff \langle P_0 - f, Q \rangle = 0}$$

6 **Rappel de cours :**

► ***À retenir*** : **Le théorème de Pythagore**.
Dire que $\vec{x}$ est ***orthogonal*** à $\vec{y} \iff \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Pour montrer l'égalité $\forall P \in E_n, \quad \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$, remarquons que

$$P - f = P - P_0 + P_0 - f.$$

• Puisque P et P_0 appartiennent à E_n, le polynôme $P - P_0$ appartient encore à E_n. D'après le résultat de la question précédente, le polynôme $P_0 - f$ est ***orthogonal*** à $P - P_0$. Par application du théorème de Pythagore,

$$\|P_0 - f + P - P_0\|^2 = \|P_0 - f\|^2 + \|P - P_0\|^2$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\|f - P\|^2 = \|P_0 - f\|^2 + \|P - P_0\|^2}$$

7 Nous venons de montrer que

$$\forall P \in E_n, \quad [d(P)]^2 = \|f - P\|^2 = \|P_0 - f\|^2 + \|P - P_0\|^2$$

Comme P_0 et f sont fixés, lorsque P varie dans E_n, cette expression est minimale si, et seulement si, $\|P - P_0\|^2 = 0$. La norme de $P - P_0$ est nulle si, et seulement si, $P - P_0 = 0$. En résumé,

$$\boxed{d(P) \text{ est minimal } \iff P = P_0}$$

8 Montrer $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$ revient à montrer $\|P_0 - f\|^2 + \|P_0\|^2 = \|f\|^2$. Appliquons de nouveau la même technique que précédemment et écrivons

$$f = f - P_0 + P_0.$$

Comme $P_0 \in E_n$ donc $f - P_0$ est ***orthogonal*** à P_0. Le théorème de Pythagore s'applique :

$$\|f - P_0 + P_0\|^2 = \|f - P_0\|^2 + \|P_0\|^2$$

En résumé,

$$\boxed{\|f\|^2 = \|f - P_0\|^2 + \|P_0\|^2}$$

11 NON et NON, la matrice M n'est pas nécessairement symétrique, car la base canonique $\mathcal{B}$ n'est pas une base orthonormale pour notre produit scalaire. En effet,

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle 1, X \rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ ne sont même pas orthogonaux !

Rappel de cours

► ***À retenir*** : La matrice d'un endomorphisme ***symétrique*** dans une base quelconque n'est pas nécessairement symétrique ! Pour qu'elle le soit il faut, et il suffit que la base soit ***orthonormale***.

12 B, qui est la matrice de l'endomorphisme symétrique φ dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, est une matrice symétrique.

13 **Rappel de cours**

► ***À retenir*** :

1. Une matrice carrée P réelle de taille (n, n) est une ***matrice orthogonale*** si P est inversible et si

$$^tP = P^{-1}.$$

2. Les vecteurs colonnes (ou les vecteurs lignes) d'une une ***matrice orthogonale*** forment une ***base orthonormale*** de $\mathbb{R}^n$ (muni de la structure euclidienne canonique).

.

► ***À retenir*** :

3. Toute matrice orthogonale joue le rôle d'une matrice de passage d'une ***base orthonormale*** à une autre ***base orthonormale***.

4. Réciproquement, la matrice de passage d'une ***base orthonormale*** à une autre ***base orthonormale*** est une ***matrice orthogonale***
5. Soit B une ***matrice symétrique réelle*** d'ordre n. Alors il existe une matrice ***orthogonale*** P et une matrice ***diagonale*** réelle D telles que
$$P^{-1}AP = {}^tPAP = D = \textbf{\textit{matrice diagonale.}}$$

La matrice B étant symétrique à coefficients réels, d'après le cours, il existe une matrice orthogonale P, et une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP,$$
où
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \text{ sont les valeurs propres de } B.$$
N'oublions pas que d'après l'hypothèse, les valeurs propres λ_i de B sont strictement positives.

14 Comme $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i > 0$, il est clair que la matrice diagonale Δ telle que $\Delta^2 = D$ est la matrice
$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

► Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la matrice $G = P\Delta\,{}^tP$. Comme
$${}^tG = {}^t(P\Delta\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = G,$$
G est donc ***symétrique***. Comme G est la matrice de g dans une ***base orthonormale*** l'endomorphisme g est symétrique, c'est-à-dire :
$$\langle g(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, g(\vec{y})\rangle.$$

► Rappelons que φ est l'endomorphisme de dont la matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}'$ est la matrice B. Comme
$$B^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = A,$$
par conséquent
$$\boxed{g^2 = \varphi}$$

15 Pour tous les entiers i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$, soit $\vec{v}_i = g(\vec{\varepsilon}_i)$,
$$\begin{aligned}\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle &= \langle g(\vec{\varepsilon}_i), g(\vec{\varepsilon}_j)\rangle = \langle g\circ g(\vec{\varepsilon}_i), \vec{\varepsilon}_j\rangle, \quad (\text{car } g \text{ est un endomorphisme } \textbf{symétrique}) \\ &= \langle \varphi(\vec{\varepsilon}_i), \vec{\varepsilon}_j\rangle\ .\end{aligned}$$
Rappelons la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base.

Rappel de cours :

► ***À retenir*** : Si $B = (b_{ij})$ est la matrice de φ dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, nous avons le schéma suivant :
$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\vec{\varepsilon}_1) & f(\vec{\varepsilon}_2) & & f(\vec{\varepsilon}_n) \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \leftarrow \vec{\varepsilon}_1 \\ \leftarrow \vec{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \vec{\varepsilon}_n \end{matrix}$$

Par conséquent, $\varphi(\vec{\varepsilon}_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{\varepsilon}_k$. Comme $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = \langle \varphi(\vec{\varepsilon}_i), \vec{\varepsilon}_j\rangle$, il vient
$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{\varepsilon}_k, \vec{\varepsilon}_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\langle \vec{\varepsilon}_k, \vec{\varepsilon}_j\rangle = b_{ji} = b_{ij}$$
car la base $\mathcal{B}'$ est ***orthonormale*** et la matrice B est symétrique. Nous venons de prouver que
$$\boxed{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = b_{ij}}$$

Fin de la première leçon.

Poursuivons notre révision et étudions maintenant un extrait d'un autre sujet,

Pour tout couple de polynômes (P,Q) de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1 Montrer que $(\mathbb{R}_n[X],\langle,\rangle)$ est un espace euclidien.

2 On considère la fonction f associant à tout n- upplet $(x_0,\dots,x_{n-1})$ de réels l'expression

$$f(x_0,\dots,x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - \cdots - x_1 t - x_0)^2 dt$$

(qui représente le carré de la distance entre les deux polynômes $t \longmapsto t^n$ et $t \longmapsto t^n - x_{n-1}t^{n-1} - \cdots - x_1 t - x_0$).

3 Citer avec précision le théorème permettant d'affirmer l'existence et l'unicité d'un n-uplet $(a_0,\dots,a_{n-1})$ réalisant le minimum(désormais noté m_n) de $f(x_0,\dots,x_{n-1})$ et montrer que $(a_0,\dots,a_{n-1})$ vérifie les n relations suivantes

$$\int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0)\cdot t^k dt = 0 \quad \text{où} \quad 0 \leqslant k < n$$

On explicitera ces n relations en calculant les n intégrales figurant ci-dessus pour $0 \leqslant k < n$.

4 Montrer que

$$m_n = f(a_0,\dots,a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0)\cdot t^n dt$$

Solution

1 Les points de démonstration *symétrie, bilinéarité* et *définition* sont analogues à ceux proposés dans la question 1 du problème précédent. L'analogie s'arrête là. Montrons maintenant la *définition*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P,P\rangle = 0$. Ce qui équivaut à dire que $\displaystyle\int_0^1 [P(t)]^2 dt = 0$.

L'intégrale d'une fonction ***positive*** et ***continue*** est nulle si, et seulement si, $\forall t \in [0,1], P^2(t) = 0$, donc $P(t) = 0$.

► Le polynôme P admet ainsi une *infinité* de *racines* sur $[0,1]$, c'est le polynôme nul, *i.e.* $P = 0$ (n'oublions pas que 0 est l'unique polynôme possédant une infinité de racines !)

► ***À retenir*** :

La différence entre ces deux démonstrations de la *définition* de $\langle,\rangle$ est que

— dans le premier problème, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, donc on ne s'occupe pas des valeurs de t extérieures à $[0,1]$;

—dans le deuxième problème, $E = \mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales, donc définies sur $\mathbb{R}$; par conséquent il faut voir ce qui se passe pour les valeurs de t extérieures à $[0,1]$. C'est ici qu'intervient la notion de *racine* de polynôme.

En résumé, $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2 **Rappel de cours : Minimum obtenu par projection orthogonale.**

► ***À retenir*** :

Théorème : Soient $(E,\langle,\rangle)$ un *espace euclidien* et F un sous-espace vectoriel de E.

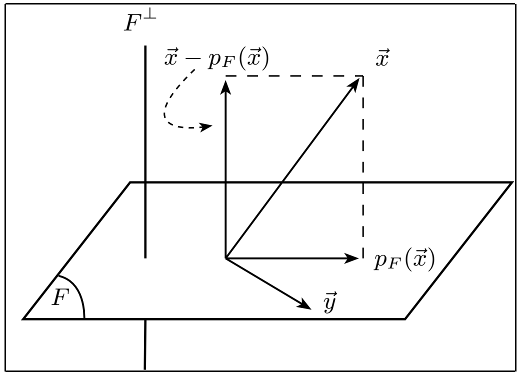
Pour tout $\vec{x} \in E$, soit $p_F(\vec{x})$ la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur F.

Alors $p_F(\vec{x})$ est l'*unique* vecteur appartenant à F qui minimise $\|\vec{x}-\vec{y}\|$, lorsque $\vec{y}$ parcourt F. Autrement dit,

$$\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \min_{\vec{y}\in F} \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

• *À retenir :* dans la pratique, pour calculer $p_F(\vec{x})$ on peut exprimer que $\vec{x} - p_F(\vec{x})$ est orthogonal à une base de F.

On peut interpréter ce résultat en disant que $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$ est la *distance* qui sépare $\vec{x}_0$ et F, voir figure suivante.



► Rappelons que la *norme* $\|P\|$ associée au produit scalaire est définie par

$$\|P\|^2 = \langle P, P\rangle = \int_0^1 P(t)\cdot P(t)dt = \int_0^1 [P(t)]^2 dt$$

Réécrivons $f(x_0,\dots,x_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - \dots - x_1 t - x_0)^2 dt$ sous la forme de *norme* associée au produit scalaire $\langle , \rangle$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x_0,\dots,x_{n-1}) &= \int_0^1 (t^n - x_{n-1}t^{n-1} - \dots - x_1 t - x_0)^2 dt \\ &= \Big\langle t^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i\ ,\ t^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i \Big\rangle \\ &= \|t^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i\|^2 \end{aligned}$$

Par analogie pour notre question, nous observons que

- t^n joue le rôle de $\vec{x}$,
- $\sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i$ joue le rôle de $\vec{y}$.

Remarquons en outre que dire $(x_0,\dots,x_{n-1})$ parcourt $\mathbb{R}^n$, équivaut à dire que $\vec{y} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i$ parcourt E_n, où $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- C'est donc E_n qui joue le rôle de F dans le théorème ***Minimum obtenu par projection orthogonale***.

Donc il existe un et un seul polynôme qui minimise $\|t^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i\|^2$, c'est $p_{E_n}(t^n)$, où p_{E_n} désigne le ***projecteur orthogonal*** sur E_n.

Comme $p_{E_n}(t^n)$ est un polynôme appartenant à E_n. Posons

$$p_{E_n}(t^n) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i.$$

- D'après le rappel de cours, pour calculer $p_{E_n}(t^n)$ il faut et il suffit d'exprimer que $t^n - p_{E_n}(t^n)$ est orthogonal à une base de E_n.

Comme $(t^k)_{0\leqslant n-1}$ est une base de E_n, celà revient à écrire que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad t^n - p_{E_n}(t^n) \perp t^k$$

i.e.,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \langle t^n - p_{E_n}(t^n), t^k\rangle = 0,$$

ou encore, sous la forme intégrale,

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \int_0^1 \left[t^n - p_{E_n}(t^n)\right]\cdot t^k\, dt = 0}$$

3 Rappelons que

$$f(x_0,\dots,x_{n-1}) = \|t^n - \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i\|^2$$

en particulier avec $(x_0,\dots,x_{n-1}) = (a_0,\dots,a_{n-1})$,

$$f(a_0,\dots,a_{n-1}) = \|t^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i\|^2 = \|t^n - p_{E_n}(t^n)\|^2$$

Posons comme tout à l'heure, $F = E_n$, $\quad \vec{x} = t^n$ et $p_F(\vec{x}) = p_{E_n}(t^n)$ pour rendre les choses un peu plus lisibles, il vient :

$$\begin{aligned} f(a_0,\dots,a_{n-1}) &= \|t^n - p_{E_n}(t^n)\|^2 = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2 \\ &= \langle \vec{x} - p_F(\vec{x}), \vec{x} - p_F(\vec{x})\rangle, \quad \text{donc par bilinéarité,} \\ &= \langle \vec{x} - p_F(\vec{x}), \vec{x}\rangle - \langle \vec{x} - p_F(\vec{x}), p_F(\vec{x})\rangle \end{aligned}$$

Comme $\vec{x} - p_F(\vec{x})$ est *orthogonal* à F, donc à $p_F(\vec{x})$, car ce dernier appartient à F, il vient

$$\langle \vec{x} - p_F(\vec{x}), p_F(\vec{x})\rangle = 0.$$

En résumé, il ne reste dans le développement de $f(a_0,\dots,a_{n-1})$ que le premier terme $\langle \vec{x} - p_F(\vec{x}), \vec{x}\rangle$. Soit en revenant à nos notation originelles

$$\boxed{f(a_0,\dots,a_{n-1}) = \langle t^n - p_{E_n}(t^n)\ ,\ t^n\rangle = \Big\langle t^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i, t^n\Big\rangle = \int_0^1 \Big(t^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i\Big)\cdot t^n\, dt}$$

Leçon 3

Poursuivons ensuite notre programme de révision d'Algèbre par l'étude d'une suite de polynômes (P_n) orthogonaux, qui fait partie des thèmes souvent posés à l'écrit.

► Quelques ***Ruses*** pour étudier ces polynômes :

► ***À retenir*** :

1. Formule de Leibniz pour dériver n fois un produit de fonctions.

2. Formule d'intégration par parties successives, qui se montre facilement par récurrence sur n,

$$\int_0^1 f(x)\cdot g^{(n)}(x)\,dx = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-1-k)}(x)\right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(x)\cdot g(x)\,dx$$

3. ► ***TRÈS IMPORTANT : L'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme qui change de signes.***

Si un polynôme P s'annule en α et change de signe en ce point, l'ordre de multiplicité de α ***est nécessairement impair.*** Montrons -le.

Posons $P(X) = (X-\alpha)^k Q(X)$, où $Q(\alpha) \neq 0$. Comme $Q(X)$ est continu et comme il ne s'annule pas en α, $Q(X)$ ***garde un signe constant*** sur un intervalle $[a, b]$ contenant α.

Supposons par l'absurde que $k = 2p$. Puisque la puissance est paire, $(X-\alpha)^k \geqslant 0$, comme $Q(X)$ garde un signe constant sur $[a, b]$, le polynôme P garde un signe constant sur $[a, b]$. Ce qui contredit notre hypothèse. Donc k est impair.

► **LES QUESTIONS QUE L'ON NOUS POSE SÛREMENT :**

1. Degré de P_n et coefficient du monôme de plus haut degré.
2. Relation de récurrence liant P_{n+1} et P_n.
3. Symétrie d'un endomorphisme L, c'est-à-dire $\langle L(P), Q\rangle = \langle P, L(Q)\rangle$, puis application à la démonstration de l'orthogonalité de la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ (relativement à la structure $\langle , \rangle$ bien sûr).
4. Norme de P_n.
6. Calcul de $\int_0^1 P_n(x)\,dx$.
7. Racines de P_n.

On munit maintenant $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)\cdot Q(t)\,dt$

On définit l'application L , appelée *opérateur de Legendre :* par la relation $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$L(P)(X) = [(X^2-1)P'(X)]'.$$

1 Montrer que L est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$. L est-il diagonalisable ?

2 Vérifier les relations suivantes

$$[(X^2-1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2-1)^n = 0 \quad (1)$$
$$(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n = 0 \quad (2)$$

3 On définit la suite de polynômes P_n par : $P_0(X) = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$$

où $[(X^2-1)^n]^{(n)}$ est la dérivée n-ième de $(X^2-1)^n$.

En dérivant $(n+1)$ fois la relation (2) , montrer que

$$L(P_n) = n(n+1)P_n.$$

4 Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On les appelle polynômes orthogonaux de Legendre.

5 Par une intégration par parties, montrer que

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n'(x)P_n(x)dx \quad (3)$$

6 En décomposant $XP_n'(X)$ dans la base orthogonale $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, déduire la formule

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}\ . \quad (4)$$

7 Montrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

8 En déduire que les fonctions polynomiales P_{2n} et P_{2n+1} sont respectivement paire et impaire.

9 En écrivant $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ et en appliquant la formule de Leibniz, montrer

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k\ .$$

10 En déduire $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.

11 Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\deg P_n = n$.

12 Dans P_n, calculer le coefficient a_n de X^n.

13 Montrer les relations suivantes

$$[(X^2-1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2-1)^n = 0 \quad (a)$$
$$(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n = 0 \quad (b)$$

14 Dériver $n+1$ fois la relation (a) pour montrer que

$$P_{n+1}'(X) = XP_n'(X) + (n+1)P_n(X)$$

- L'objet des questions 15 à 19 est d'établir une relation liant P_{n-1}, P_n et P_{n+1}.

15 En décomposant $XP_k(X)$ dans la base $(P_0, P_1, \ldots P_n)$ montrer que :

$$\forall k \leqslant n-2\ ,\ \ (XP_n|P_k) = 0.$$

16 Montrer que le polynôme $T_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

17 Décomposer $T_n(X)$ dans la base $(P_0, P_1, \ldots P_n)$.
Montrer que toutes les composantes de T_n suivant P_k, où $k \leqslant n-2$, sont nulles.

18 En exploitant la parité des fonctions polynomiales $P_{n+1}(X)$, $XP_n(X)$, $P_{n-1}(X)$ et $P_n(X)$, montrer que la composante de T_n suivant P_n est nulle.

19 Remplacer $X = 1$ pour obtenir la composante de T_n suivant P_{n-1}.

En déduire la formule de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X) = 0. \tag{5}$$

On pose $f_n(x) = (x^2-1)^n$.

20 Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine 1 de $f_n(x)$?

21 En déduire que $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$, $(x-1)$ et $(x+1)$ divisent $\big[f_n(x)\big]^{(p)}$ et que x^2-1 divise $\big[f_n(x)\big]^{(p)}$.

22 En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer par récurrence que $\big[f_n(x)\big]^{(p)}$ admet p racines réelles appartenant à $]-1,1[$.

23 Montrer que P_n admet n racines réelles distinctes appartenant à $]-1,1[$.

24 En calculant $P_n(-X)$, montrer que les racines de P_n sont disposées symétriquement par rapport à 0.

25 Si α_n est la plus grande racine de P_n, quel est le signe de P_n sur $]\alpha_n, +\infty[$?

Dans cette partie, nous étudierons le comportement de la suite (α_n), où α_n est la plus grande racine de P_n,

26 Calculer α_1, α_2 et vérifier que $\alpha_1 < \alpha_2$.

27 En supposant par récurrence que $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ et en utilisant l'égalité (5), montrer que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

28 Montrer enfin que la suite (α_n) converge.

Solution

1 Nous vous laissons le soin de montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

► **Réflexe pour montrer la symétrie de L : Intégration par parties.**

Pour tous les polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\big\langle L(P), Q\big\rangle = \int_{-1}^{1} L(P)(x)\cdot Q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} [(x^2-1)P'(x)]'\cdot Q(x)\,dx.$$

Intégrons la dernière intégrale par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} du = [(x^2-1)P'(x)]'dx\ ; & u = (x^2-1)P'(x) \\ v = Q(x)\ ; & dv = Q'(x)dx\ , \end{array}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\big\langle L(P), Q\big\rangle &= \underbrace{[(x^2-1)P'(x)\cdot Q(x)]_{-1}^{1}}_{0} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)P'(x)\cdot Q'(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)\cdot Q'(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

L'expression $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)\cdot Q'(x)\,dx$ étant symétrique par rapport à P et Q, soit en permutant les rôles joués par P et par Q, nous obtenons aussi

$$\big\langle L(Q), P\big\rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)Q'(x)\cdot P'(x)\,dx = \big\langle L(P), Q\big\rangle.$$

Sachant qu'un produit scalaire est symétrique, $\big\langle L(Q), P\big\rangle = \big\langle P, L(Q)\big\rangle$. En résumé, nous avons montré

$$\boxed{\big\langle L(P), Q\big\rangle = \big\langle P, L(Q)\big\rangle}$$

L'endomorphisme L est un endomorphisme ***symétrique .*** Il est diagonalisable dans une base orthonormale relativement au produit scalaire $\langle , \rangle$.

2 Il suffit de dériver $(X^2-1)^{n+1}$ une fois pour obtenir (1) .
Ensuite, on dérive $(X^2-1)^n$ et on le multiplie par (X^2-1) pour obtenir la relation (2).

3 Un peu de méthode. Nous commençons par effectuer une dérivation dans l'expression de $L(P_n)$ pour en obtenir une écriture plus détaillée

$$L(P_n)(X) = [(X^2-1)P_n'(X)]' = 2XP_n'(X) + (X^2-1)P_n''(X)$$

- Ensuite, nous dérivons $n+1$ fois la relation (2) , comme le suggère l'énoncé

$$\Big[(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n\Big]^{(n+1)} = 0.$$

Appliquons la formule de Leibniz à cette dérivée $n+1$ ième,

$$\Big[(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n\Big]^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (X^2-1)^{(k)}[(X^2-1)^n]^{(n+1-k)} - 2nX\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (X)^{(k)}[(X^2-1)^n]^{(n+1-k)}.$$

• Développons terme à terme ces sommes. Compte tenu du fait que $\left[(X^2-1)\right]^{(k)}=0$, pour $k\geqslant 3$, et $\left[X\right]^{(k)}=0$, pour $k\geqslant 2$, il ne reste que peu de termes non nuls , qui sont

$$\begin{aligned}C_{n+1}^0\left[(X^2-1)\right]^{(0)}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+2)}+C_{n+1}^1\left[(X^2-1)\right]^{(1)}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+1)}\\+C_{n+1}^2\left[(X^2-1)\right]^{(2)}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}-2n\Big(C_{n+1}^0[X]^{(0)}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+1)}\\-C_{n+1}^1[X]^{(1)}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\Big)=0.\end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned}(X^2-1)\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+2)}+(n+1)\cdot 2X\cdot\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+1)}\\+n(n+1)\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}-2n\Big(X\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+1)}-(n+1)\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\Big)=0,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(X^2-1)\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+2)}+(n+1)\cdot 2X\cdot\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+1)}\\+n(n+1)\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}=2n\Big(X\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+1)}-(n+1)\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\Big)\end{aligned}$$

Ensuite, il faut faire apparaître P_n dans ce magma et retrouver une expression de $L(P_n)$.

• Remarquons que

$$\left[(X^2-1)^n\right]^{(n+2)}=\Big(\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\Big)''\ \text{ et }\ \left[(X^2-1)^n\right]^{(n+1)}=\Big(\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\Big)'$$

qui sont, à un facteur multiplicateur près, presque les dérivées première et seconde de $P_n(X)$ (rappelons que $P_n(X)=\dfrac{1}{2^n n!}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$). L'égalité précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned}(X^2-1)\left(\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\right)''+2(n+1)X\left(\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\right)'\\+n(n+1)\left(\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\right)=2nX\left(\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\right)'+2n(n+1)\left(\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}\right).\end{aligned}$$

• Enfin il reste à diviser les deux membres par $2^n n!$ pour faire apparaître $P_n(X)$. Soit

$$(X^2-1)P_n''(X)+2(n+1)XP_n'(X)+n(n+1)P_n(X)=2nXP_n'(X)+2n(n+1)P_n(X)$$

Regroupons maintenant les dérivées premières et secondes de P_n,

$$\underbrace{(X^2-1)P_n''(X)+2XP_n'(X)}_{L(P_n)}=n(n+1)P_n(X).$$

Vous avez certainement reconnu $L(P_n)(X)$ dans le membre de gauche, d'où l'égalité demandée :

$$\boxed{L(P_n)=n(n+1)P_n}$$

• Les calculs précédents étant valables quel que soit l'entier n. En particulier,

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad L(P_k)=k(k+1)P_k$$

Il découle de ce résultat que L admet $(n+1)$ valeurs propres distinctes, qui sont $k(k+1)$, $k\in[\![0\,;\,n]\!]$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension $(n+1)$, L est diagonalisable, la dimension de chaque sous-espace propre $E_{k(k+1)}$ est donc égale à 1.

Comme P_k est un polynôme propre associé à la valeur propre $k(k+1)$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc une base de polynômes propres de L.

Rappel de cours

► ***À retenir*** : Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle,\rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique. Alors :
— la matrice de f dans une base orthonormale est symétrique,
— les valeurs propres de f sont réelles,
— les sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux deux à deux,
— f est diagonalisable dans une base orthonormale.

4

L'endomorphisme L étant ***symétrique***, les polynômes propres associés aux valeurs propres distinctes sont donc ***orthogonaux.*** Il s'ensuit que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est ***orthogonale :*** c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : on peut aussi montrer directement l'orthogonalité de $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ en partant de la relation $\langle L(P_i),P_j\rangle=\langle P_i,L(P_j)\rangle$. Sachant que $\langle L(P_i),P_j\rangle=\langle i(i+1)P_i,P_j\rangle$ et $\langle P_i,L(P_j)\rangle=\langle P_i,j(j+1)P_j\rangle$, nous obtenons :

$$i(i+1)\langle P_i,P_j\rangle=j(j+1)\langle P_i,P_j\rangle\iff[i(i+1)-j(j+1)]\langle P_i,P_j\rangle=0.$$

Comme $i\neq j$, $i(i+1)-j(j+1)\neq 0$. Donc

$$\boxed{\forall i\neq j\ ,\ \langle P_i,P_j\rangle=0}$$

5 En posant $U'(x)=1$, $V(x)=P_n^2(x)$, effectuons une intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_n^2(x)\,dx&=\int_{-1}^1 1\cdot P_n^2(x)\,dx=\left[xP_n^2(x)\right]_{-1}^1-2\int_0^1 x\cdot P_n'(x)P_n(x)\,dx\\&=2-2\int_0^1 x\cdot P_n'(x)P_n(x)\,dx,\end{aligned}$$

car $P_n(1)=1$ et $P_n(-1)=(-1)^n$.

6 Comme $\deg\left(XP_n'(X)\right)\leqslant n$, $XP_n'(X)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Décomposons-le dans la base orthogonale $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$: il existe des réels uniques $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n$ tels que

$$\boxed{XP_n'(X)=\beta_0P_0(X)+\beta_1P_1(X)+\cdots+\beta_nP_n(X)}\qquad(*)$$

Dans ces conditions, compte tenu de l'orthogonalité de $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 xP_n'(x)P_n(x)\,dx&=\langle XP_n',P_n\rangle=\sum_{k=0}^n\langle\beta_kP_k,P_n\rangle\\&=\underbrace{\beta_0\langle P_0,P_n\rangle}_{=0}+\cdots+\underbrace{\beta_{n-1}\langle P_{n-1},P_n\rangle}_{=0}+\beta_n\langle P_n,P_n\rangle\\&=\beta_n\|P_n\|^2\ .\end{aligned}$$

En vertu des résultats obtenus en 5, nous avons alors

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x)\,dx=2-2\int_0^1 x\cdot P_n'(x)P_n(x)\,dx=2-2\beta_n\|P_n\|^2\iff\|P_n\|^2=2-2\beta_n\|P_n\|^2$$

$$i.e.\quad \|P_n\|^2 = \frac{2}{1+2\beta_n}\ .$$

► Tout revient à calculer β_n en identifiant les coefficients du terme de plus haut degré de $XP_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k P_k(X)$.

Remarquons que le monôme de plus haut degré de $\sum_{k=0}^{n} \beta_k P_k(X)$ est celui de $\beta_n P_n$ car le degré de P_n est n.

Posons $P_n(X) = a_n X^n + \underbrace{a_{n-1}X^{n-1} + \cdots}_{degré\ \leqslant n-1}$, avec $a_n \neq 0$.

Il vient

$$\begin{aligned} P_n'(X) &= na_nX^{n-1} + \underbrace{\cdots}_{degré\ \leqslant n-2} \\ XP_n'(X) &= X(na_nX^{n-1} + \underbrace{\cdots}_{degré\ \leqslant n-2}) \\ XP_n'(X) &= na_nX^n + \underbrace{\cdots}_{degré\ \leqslant n-1} \end{aligned}$$

Comme $\beta_n P_n(X) = \beta_n a_n X^n + \underbrace{\cdots}_{degré\ \leqslant n-1}$ et comme le monôme de plus haut degré de $XP_n'(X)$ est celui de $\beta_n P_n(X)$. Nous obtenons l'égalité :

$$\boxed{\beta_n a_n = na_n \Longleftrightarrow \beta_n = n}$$

En résumé,

$$\boxed{\|P_n\|^2 = \frac{2}{1+2\beta_n} = \frac{2}{2n+1}}$$

7 Soit f une fonction ***paire*** et dérivable sur $\mathbb{R}$. Dérivons l'égalité

$$f(-x) = f(x),$$

nous obtenons

$$-f'(-x) = f'(x) \Longleftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

Donc f' est impaire. La démonstration de l'autre cas est similaire.

8 Soit $f_n(x) = (x^2-1)^n$. Puisque f est une fonction paire, sa dérivée f' est impaire.
A son tour, sa dérivée d'ordre 2 est paire. Plus généralement, on montre facilement par récurrence que :
— $f_n^{(2p+1)}$ est impaire.
— $f_n^{(2p)}$ est paire.

Par conséquent, à un facteur multiplicatif près,

P_{2n}, qui est une dérivée d'ordre pair de f, est paire.
P_{2n+1}, qui est une dérivée d'ordre impair de f, est impaire.

10 Écrivons la formule de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit $(X-1)^n(X+1)^n$,

$$\Big[(X-1)^n(X+1)^n\Big]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big[(X-1)^n\Big]^{(k)} \Big[(X+1)^n\Big]^{(n-k)}\ .$$

Pour le membre de droite, la dérivée k-ième de $(X-1)^n$ est

$$\Big[(X-1)^n\Big]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)(X-1)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\ ,$$

et la dérivée $(n-k)$-ième de $(X-1)^n$ est

$$\Big[(X+1)^n\Big]^{(n-k)} = n(n-1)\cdots(k+1)(X+1)^k = \frac{n!}{k!}(X+1)^k.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \Big[(X-1)^n\Big]^{(k)}\Big[(X+1)^n\Big]^{(n-k)} &= n!\,\frac{n!}{(n-k)!k!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k \\ &= n!C_n^k(X-1)^{n-k}(X+1)^k\ . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(X^2-1)^n}{dX^n} &= \frac{1}{2^n n!}\Big[(X-1)^n(X+1)^n\Big]^{(n)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 n!(X-1)^{n-k}(X+1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k\ . \end{aligned}$$

D'où la relation demandée :

$$\boxed{P_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k}$$

10 Écrivons l'identité précédente sous une forme détaillée

$$\begin{aligned} P_n(X) = \frac{1}{2^n}\Big[&(C_n^0)^2(X-1)^n + (C_n^1)^2(X-1)^{n-1}(X+1)^1 + \cdots \\ &\cdots + (C_n^{n-1})^2(X-1)(X+1)^{n-1} + (C_n^n)^2(X+1)^n\Big] \end{aligned}$$

Ensuite, remplaçons X par 1. Tous les termes sont nuls, à l'exception du dernier, et compte tenu du fait que $C_n^n = 1$, nous obtenons

$$\boxed{P_n(1) = \frac{1}{2^n}2^n = 1}$$

- Ensuite, remplaçons X par -1 , nous obtenons aussi

$$\boxed{P_n(-1) = \frac{1}{2^n}(-2)^n = (-1)^n}$$

11 Le degré de P_n est égal à n, car ce dernier s'obtient en dérivant n fois le polynôme $(X^2-1)^n$, qui est un polynôme de degré $2n$.

12 La dérivée première de $(X^2-1)^n$ fait apparaître le coefficient $2n$, sa dérivée seconde le oefficient $2n\cdot(2n-1)$ et par récurrence, la dérivée n-ème de $(X^2-1)^n$, le coefficient

$$2n(2n-1)\cdots(n+1).$$

Par conséquent, le coefficient de X^n dans $P_n(X)$ est

$$\boxed{a_n = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}}$$

13

- Il suffit de dériver le polynôme $(X^2-1)^{n+1}$ pour obtenir (a),

$$\boxed{[(X^2-1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2-1)^n = 0}$$

- Ensuite on dérive $(X^2-1)^n$ et on le multiplie par X^2-1, d'où (b),

$$\boxed{(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n = 0}$$

14

- Dérivons $n+1$ fois la relation (a) ,

$$\begin{aligned}\big([(X^2-1)^{n+1}]'\big)^{(n+1)} - 2(n+1)\big[X(X^2-1)^n\big]^{(n+1)} &= 0\\ \Big(\big([(X^2-1)^{n+1}\big)^{(n+1)}\Big)' - 2(n+1)\Big(\big(X(X^2-1)^n\big)^{(n)}\Big)' &= 0 \qquad (*).\end{aligned}$$

- Ensuite on divise ses deux membres par $2^{n+1}(n+1)!$ et on applique la ***formule de Leibniz*** à $\big(X(X^2-1)^n\big)^{(n)}$ on obtient

$$\begin{aligned}\big(X(X^2-1)^n\big)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X)^{(k)}[(X^2-1)]^{(n-k)}\\ &= C_n^0(X)^{(0)}[(X^2-1)]^{(n-0)} + C_n^1(X)^{(1)}[(X^2-1)]^{(n-1)} + \text{termes nuls}\end{aligned}$$

Ainsi $(*)$ devient

$$\begin{aligned}P'_{n+1}(X) - \frac{1}{2^n n!}\Big[C_n^0(X)^{(0)}[(X^2-1)]^{(n-0)} + C_n^1(X)^{(1)}[(X^2-1)]^{(n-1)}\Big]' &= 0\\ P'_{n+1}(X) - \frac{1}{2^n n!}\Big(\big(X(X^2-1)^n\big)^{(n)}\Big)' - n\frac{1}{2^n n!}\big((X^2-1)^n\big)^{(n)} &= 0\\ P'_{n+1}(X) - [XP_n(X)]' - nP_n(X) &= 0\\ P'_{n+1}(X) - [P_n(X) + XP'_n(X)] - nP_n(X) &= 0\\ P'_{n+1}(X) - (n+1)P_n(X) - XP'_n(X) &= 0\end{aligned}$$

D'où l'égalité (c),

$$\boxed{P'_{n+1}(X) = XP'_n(X) + (n+1)P_n(X)}$$

15 Pour tout entier $k \leqslant n-2$, le polynôme $XP_k(X)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Il existe des coefficients $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tels que :

$$XP_k(X) = \gamma_0 P_0(X) + \gamma_1 P_1(X) \cdots + \gamma_n P_n(X).$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}(XP_n|P_k) &= \int_{-1}^{1} P_n(x)xP_k(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)(\gamma_0 P_0(x) + \cdots + \gamma_n P_n(x)\,dx\\ &= \sum_{k=0}^{n}\gamma_k\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k (P_n|P_k).\end{aligned}$$

Or $\forall k \neq n$, $(P_n|P_k) = 0$. Il s'ensuit que :

$$(XP_n|P_k) = \gamma_n (P_n(x)|P_n(x))$$

Remarquons que le degré de $XP_k(X)$ est strictement inférieur à n (n'oubliez pas que $\deg P_k = k$). Donc la composante de $XP_k(X)$ suivant P_n est nulle, c'est-à-dire :

$$\gamma_n = 0$$

En résumé,

$$\boxed{\forall k \leqslant n-2\ ,\ \ (XP_n|P_k) = 0}$$

16 Le lecteur vérifie sans peine que $\deg T_n \leqslant n$, donc $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

17 Puisque $T_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X)$ et puisque $XP_n(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, il existe alors des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que

$$XP_n(X) = \lambda_0 P_0(X) + \lambda_1 P_1(X) + \cdots \lambda_{n+1}P_{n+1}(X).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(XP_n|P_k) &= \lambda_0(P_0|P_k) + \lambda_1(P_1|P_k) + \cdots \lambda_{n+1}(P_{n+1}|P_k) = \lambda_k(P_k|P_k)\\ &= \lambda_k\|P_k\|^2\end{aligned}$$

Comme $\forall k \leqslant n-2$, $(XP_n|P_k) = 0$, il s'ensuit

$$\lambda_k\|P_k\|^2 = 0.$$

Or $\|P_k\|^2 \neq 0$, donc

$$\boxed{\forall k \leqslant n-2\ ,\ \ \lambda_k = 0}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}T_n(X) &= (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X)\\ &= (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)[\lambda_{n-1}P_{n-1}(X) + \lambda_n P_n(X)\\ &\quad + \lambda_{n+1}P_{n+1}(X)]\end{aligned}$$

D'après b, $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$, ce qui signifie que le coefficient correspondant à P_{n+1} dans T_n est nul. Le polynôme T_n s'écrit alors

$$T_n(X) = -(2n+1)[\lambda_{n-1}P_{n-1}(X) + \lambda_n P_n(X)] = \alpha_{n-1}P_{n-1}(X) + \alpha_n P_n(X)$$

Cette égalité signifie que toutes les composantes de T_n suivant P_k sont nulles, où $k \leqslant n-2$.

Il nous reste à déterminer α_{n-1} et α_n.

18 Rappelons que $T_n(X) = (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X)$.
Exploitons la parité des fonctions polynomiales $P_{n+1}(X)$, $XP_n(X)$, $P_{n-1}(X)$ et $P_n(X)$.

► Supposons que $n = 2p$.
Alors les fonctions polynomiales

$$P_{2p+1}(X)\ ,\ \ XP_{2p}(X)\ ,\ \ P_{2p-1}(X)$$

sont impaires et $P_{2p}(X)$ est paire.
En écrivant

$$(2p+1)P_{2p+1}(X) - (4p+3)XP_{2p}(X) - \alpha_{2p-1}P_{2p-1}(X) = \alpha_{2p}P_{2p}(X)\ ,$$

on observe que le membre de gauche est une fonction impaire alors que celui de droite est une fonction paire, donc

$$\alpha_{2p} = 0.$$

Une démonstration analogue prouve que si $n = 2p+1$ alors $\alpha_{2p+1} = 0$.
En résumé, $\alpha_n = 0$. Dans ces conditions

$$\boxed{T_n(X) = \alpha_{n-1}P_{n-1}(X)}$$

19 Pour trouver la valeur de α_{n-1}, nous remplaçons X par 1,

$$\begin{aligned} T_n(1) &= (n+1)P_{n+1}(1) - (2n+1)P_n(1) = \alpha_{n-1}P_{n-1}(1) \\ &= (n+1) - (2n+1) = \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\alpha_{n-1} = -n}$$

Ainsi, l'égalité obtenue dans la question 17 devient $(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) = -nP_{n-1}(X)$, ou encore

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X) = 0}$$

20 Comme $f_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$, il est clair que

$$\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont racines d'ordre } n \text{ de } f_n(x)}$$

21 $\left[f_n(x)\right]^{(p)}$ étant la dérivée d'ordre p de $f_n(x)$, par conséquent

$$\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont donc racines d'ordre } (n-p) \text{ de } \left[f_n(x)\right]^{(p)}}$$

Donc

$$\boxed{x^2 - 1 \text{ divise } \left[f_n(x)\right]^{(p)}}$$

22 Pour $p = 0$, $\left[f_n(x)\right]^{(0)} = f_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ qui n'a pas de racine dans $]-1,1[$.

Supposons par récurrence que $\left[f_n(x)\right]^{(p-1)}$ admet $p-1$ racines réelles dans $]-1,1[$, notées dans l'ordre croissant $x_1 < x_2 \ldots < x_{p-1}$. Comme -1 et 1 sont aussi racines de $\left[f_n(x)\right]^{(p-1)}$, appliquons le t***héorème de Rolle*** à $\left[f_n(x)\right]^{(p-1)}$ sur les intervalles $[-1,x_1]$, $[x_1,x_2], \ldots, [x_{p-1},x_{p-1}]$, $[x_p,1]$. Il existe des nombres $y_1,\ldots,y_p$ tels que

$$y_1 \in]-1,x_1[,\ y_2 \in [x_1,x_2],\ldots,y_{p-1} \in [x_{p-2},x_{p-1}],\ y_p \in]x_{p-1},1[$$

et qui vérifient

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\quad \left(\left[f_n(x)\right]^{(p-1)}\right)'(y_k) = \left[f_n(x)\right]^{(p)}(y_k) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\forall p \in [\![0,n-1]\!],\quad \left[f_n(x)\right]^{(p)} \text{ admet } p \text{ racines réelles dans }]-1,1[}$$

23 Par définition de $P_n(x)$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[f_n(x)\right]^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\left(\left[f_n(x)\right]^{(n-1)}\right)';$$

le résultat précédent s'applique : $\left[f_n(x)\right]^{(n-1)}$ admet $n-1$ racines réelles dans $]-1,1[$; comme -1 et 1 sont encore racines de $\left[f_n(x)\right]^{(n-1)}$, une nouvelle application du théorème de Rolle à $\left[f_n(x)\right]^{(n-1)}$ prouve que $\left[f_n(x)\right]^{(n)}$ admet n racines réelles distinctes dans $]-1,1[$.

Comme $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\left[f_n(x)\right]^{(n)}$, le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes dans $]-1,1[$.

Le degré de P_n étant égal à n,

$$\boxed{P_n \text{ admet donc exactement } n \text{ racines réelles distinctes dans }]-1,1[.}$$

23 bis ***Autre démonstration de l'existence des racines de P_n sur*** $]-1,1[$.

Encore une très grande ruse !

► ***D'abord calculons*** $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx$.— On va se servir de la base orthogonale $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En observant que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\cdot P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_0(x)\cdot P_n(x)\,dx = \langle P_0, P_n\rangle = 0.$$

► Il s'ensuit que P_n ne garde pas un signe constant sur $[-1,1]$. Étant continu, P_n s'annule au moins une fois sur $]-1,1[$. Soit $\alpha \in]-1,1[$ une de ces racines.

Études son ordre de multiplicité.

À RETENIR : *L'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme qui change de signes est toujours impair.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines d'ordre IMPAIR appartenant à $]-1,1[$. Alors on peut écrire

$$P_n(X) = \left(\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{k_i}\right) \cdot Q(X)$$

où les racines de $Q(X)$ sont toutes d'ordre pair (remarquons que $Q(X)$ ***ne change pas*** de signe sur $[0,1]$).

$$\int_{-1}^{1}\left(\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\right)\cdot P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{k_i}\right)\cdot Q(x)\,dx$$

Les deux premiers facteurs donnent des racines d'ordre pair, ils ne changent pas de signe, tout comme $Q(X)$, donc

$$\int_{-1}^{1}\left(\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\right)\cdot P_n(x)\,dx = \langle\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i), P_n\rangle \quad \textbf{est de signe constant}$$

Examinons le cas où $k<n$

Alors la décomposition de $\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)$ dans la base orthogonale (P_n) donne, pour des raisons de ***degré,***

$$\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i) = \gamma_0 P_0 + \cdots + \gamma_k P_k$$

Comme

$$\begin{aligned}\langle\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i), P_n\rangle &= \langle\gamma_0 P_0 + \cdots + \gamma_k P_k, P_n\rangle \\ &= \gamma_0\langle P_0, P_n\rangle + \cdots + \gamma_k\langle P_k, P_n\rangle = 0,\end{aligned}$$

donc

$$\int_{-1}^{1}\left(\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\right)\cdot P_n(x)\,dx = 0.$$

Ce qui est absurde.

Donc $k=n$.

En conclusion, P_n admet exactement n racinces réelles distinctes dans $]-1,1[$.

24 Comme

$$\begin{aligned}P_n(-X) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(-X-1)^{n-k}(-X+1)^k \\ &= (-1)^n\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k = (-1)^n P_n(X)\end{aligned}$$

donc si $P_n(\alpha)=0$ alors $P_n(-\alpha)=0$.

$$\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont disposées symétriquement par rapport à } 0}$$

25 Si α_n est la plus grande racine de P_n, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à P_n qui est continue, P_n garde un signe constant sur $]\alpha_n, +\infty[$. Tout polynôme non constant est équivalent à son monôme de plus haut degré lorsque $x\to+\infty$, donc

$$P_n(x) \approx a_n x^n > 0$$

car $a_n>0$. En résumé,

$$\boxed{P_n \text{ est strictement positif sur }]\alpha_n, +\infty[}$$

26 Avec $P_1(X)=X$, $\alpha_1=0$ et $P_2(X)=\dfrac{1}{2}(3X^2-1)$, $\alpha_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, nous obtenons $\alpha_1<\alpha_2$.

27 Supposons par récurrence que la propriété est vraie jusqu'au rang n : $\alpha_1 < \ldots \alpha_{n-1} < \alpha_n$. Soit α_{n+1} la plus grande racine de P_{n+1}.

- Nous savons, d'après 24, que les racines de P_k sont disposées symétriquement par rapport à 0, de sorte que pour tout $n\geqslant 1$, $\alpha_n>0$.
- Ensuite $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$. Car si $\alpha_n=\alpha_{n+1}$, la relation (5) impliquerait :

$$\begin{aligned}(n+1)\underbrace{P_{n+1}(\alpha_{n+1})}_{=0} &= (2n+1)\alpha_{n+1}P_n(\alpha_{n+1}) - nP_{n-1}(\alpha_{n+1}) \\ 0 &= (2n+1)\alpha_n\underbrace{P_n(\alpha_n)}_{=0} - nP_{n-1}(\alpha_n)\end{aligned}$$

On obtiendrait

$$P_{n-1}(\alpha_{n+1}) = P_{n-1}(\alpha_n) = 0.$$

Donc α_n serait encore une racine de P_{n-1}. Comme l'hypothèse suppose que $\alpha_{n-1}<\alpha_n$, ce ci contredit le fait que α_{n-1} est la plus grande racine de P_{n-1}. Donc

$$\alpha_n \neq \alpha_{n+1}.$$

- Supposons par l'absurde que l'un des deux cas suivants soit réalisé :

— **1^er^ cas** : $\alpha_{n+1}<\alpha_{n-1}<\alpha_n$

Écrivons la relation (5) formellement

$$P_n(X) = \frac{n}{(2n+1)X}P_{n-1}(X) + \frac{n+1}{(2n+1)X}P_{n+1}(X).$$

Pour tout $x>\alpha_{n-1}$, comme α_{n-1} est la plus grande racine de P_{n-1}, d'après II.3.b, $P_{n-1}(x)$ ne s'annule pas et est de signe positif. Comme ce même $x>\alpha_{n+1}$, il en est de même pour $P_{n+1}(x)$.

Il s'ensuit que $P_n(x)$, qui est une somme de deux termes strictement positifs, est ***strictement positif.*** Comme $\alpha_n>\alpha_{n-1}$, en particulier, $P_n(\alpha_n)>0$.

Cette inégalité contredit le fait que α_n est une racine de P_n. Donc ce cas est impossible.

— **2^e^ cas** : $\alpha_{n-1}<\alpha_{n+1}<\alpha_n$

Pour tout $x>\alpha_{n+1}$, le même raisonnement que précédemment conduit également à $P_n(x)>0$, donc $P_n(\alpha_n)>0$. Ce qui est aussi impossible.

En résumé,

$$\boxed{\alpha_{n-1}<\alpha_n<\alpha_{n+1}}$$

28 La suite croissante (α_n) étant majorée par 1 : elle converge. Ainsi s'achève la leçon numéro 3.

Leçon 4

Nous allons nous quitter par cette dernière leçon, qui est l'un des thèmes souvent posés à l'écrit de HEC, EML.

1 Rechercher le **noyau** et l'**image** de

$$A=\begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b\\ b & a & b & \dots & .\\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b\\ b & \dots & \dots & b & a\end{pmatrix}$$

2 Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Ruse :

► ***<u>À retenir</u>*** : Vous étudierez d'abord $\operatorname{Ker} N$ et $\operatorname{Im} N$ où N est la matrice

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & 1 & & \dots & .\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}$$

et vous observez que

$$\boxed{A=bN+(a-b)I}$$

Solution

1 Comme les vecteurs colonnes de N sont identiques, et comme

$$\operatorname{Im} N=\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_n),$$

où C_i est la i ème colonne de N, nous déduisons sans peine que

$$\boxed{\operatorname{Im} N=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}$$

► donc $\dim \operatorname{Im} N=1$ et

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} N=\dim \mathbb{R}^n-1=n-1}$$

- Une base de $\operatorname{Ker} N$ est constituée de $n-1$ vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_{n-1}$ libres, et dont les coordonnées vérifient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & 1 & & \dots & .\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\iff x_1+\dots+x_n=0.$$

(Nous avons convenu que $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ sont les coordonnées génériques d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$.)

► ***RUSE :*** choisissez toujours les vecteurs dont les coordonnées sont ***échelonnées***.

Donc une ***base*** de $\operatorname{Ker} N$ est

$$\boxed{\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\ ;\ \vec{u}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\ ;\ \dots\ ;\ \vec{u}_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\\ -1\end{pmatrix}}$$

► Ayant obtenu une base de $\operatorname{Ker} N$, retournons à notre problème et trouvons une base de $\operatorname{Ker} A$.

Sachant que

$$A=bN+(a-b)I,$$

nous déduisons (pour $b\neq 0$) :

$$\underline{X\in\operatorname{Ker} A}\iff AX=0\iff (bN+(a-b)I)X=0\iff bNX=(b-a)X\iff \boxed{NX=\frac{b-a}{b}X}$$

- ***<u>Premier cas : $0\neq b\neq a$.</u>***

De l'équivalence précédente, on en déduit que $X=\dfrac{b}{b-a}NX$. Par son écriture, X appartient à $\operatorname{Im} N$.

Comme $\operatorname{Im} N=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $X=\lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

Nous venons de prouver que

$$X\in\operatorname{Ker} A\iff X=\lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\iff X\in\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

ou que

$$\boxed{\operatorname{Ker} A=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}$$

- Cherchons maintenant l'image de A. N'oublions pas que $A=bN+(a-b)I=b\big(N+\frac{b-a}{b}I\big)$ et comme la constante b ne change rien en ce qui concerne l'image,

$$\operatorname{Im} A=\operatorname{Im}\Big(N+\frac{b-a}{b}I\Big)=\operatorname{Im}\big(N+\mu I\big)=\operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1+\mu & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & 1+\mu & & \dots & .\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+\mu & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+\mu\end{pmatrix}\ ;\ \text{où } \mu=\frac{b-a}{b}\neq 0\,\cdot$$

Sachant que

$$\dim \operatorname{Im} A = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Ker} A = n-1,$$

et, last but not least, sachant que les ***vecteurs colonnes*** de A ***engendrent*** $\operatorname{Im} A$, et la symétrie des composantes, nous sommes sûr que n'importe quel vecteur colonne de A doit être combinaison linéaire des autres. Donc les $(n-1)$ premiers vecteurs colonnes forment une base de $\operatorname{Im} A$. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1+\mu\\1\\\vdots\\\vdots\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1+\mu\\\vdots\\\vdots\\1\end{pmatrix};\ \dots\ ;\begin{pmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\1+\mu\\1\end{pmatrix}\right)}$$

- ***<u>DEUXIÈME CAS : $0 \neq b = a$.</u>***

  Dans ce cas, $A = aN$. Comme $a \neq 0$,

$$\boxed{\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} N\ ;\ \ \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} N}$$

2 Valeurs propres et vecteurs propres de A

La matrice A est une matrice symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable.

• Ecartons le cas trivial où $b = 0$, $A = aI$ est ***diagonale.***

• ***<u>Supposons que</u>*** $b \neq 0$.

► ***<u>À retenir</u>*** : Retenez les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{R} \text{ est une valeur propre de } A &\iff A-\lambda I \text{ n'est pas inversible}\\
&\iff \exists X \neq 0 \mid (A-\lambda I)X = 0.\\
&\iff \exists X \neq 0 \mid \Big(bN - (\lambda - a)I\Big)X = 0.\\
&\iff \exists X \neq 0 \mid \Big(N - \frac{\lambda-a}{b}I\Big)X = 0.\\
&\iff \mu = \frac{\lambda - a}{b} \text{ est une valeur propre de } N.
\end{aligned}$$

► De plus,

- le sous-espace propre <u>$E_\lambda(A)$ de A</u> associé à λ est le sous-espace propre <u>$F_\mu(N)$ de N</u> associé à $\mu = \dfrac{\lambda-a}{b}$,
- A est diagonalisable $\iff$ N est diagonalisable.

► Donc tout revient à rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de N.

Comme $\dim \operatorname{Ker} N = n-1$, donc $\operatorname{Ker} N \neq \emptyset$. Par conséquent,

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } N \text{ et le sous-espace propre associé à } 0 \text{, c'est-à-dire } E_0(N) \text{, est } \operatorname{Ker} N.}$$

Observons ensuite que

$$N\begin{pmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&\dots&\dots&1\\1&1&&\dots&.\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1&1\\1&\dots&\dots&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n\\\vdots\\\vdots\\n\\n\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc 1 est une autre valeur propre de N. Comme la dimension de $E_0(N)$ est déjà égale à $n-1$, il s'ensuit que

$$\boxed{1 \text{ est l'unique valeur propre de } N \text{ et } \dim E_1(N) = 1 \text{ et } E_1(N) = \operatorname{Im} N}$$

D'après la remarque précédente, a et $nb + a$ sont les valeurs propres de A. De plus

$$\boxed{E_a(A) = E_0(N) = \operatorname{Ker} N} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{nb+a}(A) = E_1(N) = \operatorname{Im} N}$$

Maintenant il ne me reste qu'à souhaiter que ces leçons soient des armes efficaces pour les Tartouilles killers.

Bonne chance à tous !

T. V. H.