Mathématiques

Maths en vacances

François Delaplace, Pierre Girard
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales (ECS2), lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles).

Comme chaque année nous pensons aux étudiants de première année qui souhaitent réviser pendant leurs vacances. Cette année nous proposons deux axes de révision : Tout d'abord l'algorithmique liée aux probabilités puis une révision du calcul algébrique et trigonométrique dont la pratique fait souvent défaut à nos élèves...

F. D. - P. G.

Première partie
Simulations d'expériences aléatoires dans les épreuves de concours

On peut constater l'importance de la simulation en PASCAL d'expériences aléatoires dans plusieurs problèmes de concours récents (tant pour la voie économique que pour la voie scientifique). C'est pourquoi nous vous conseillons les exercices suivants pour vous entraîner à ce style d'épreuves.

Quelques principes généraux utiles :

- Citons tout d'abord un extrait du problème d'HEC Math 2 option E 2001 :
« Dans le langage PASCAL, la fonction **random** renvoie, pour un argument m de type **integer** vérifiant $m \geq 1$, un nombre entier compris entre 0 et $m - 1$ (cette fonction est initialisée au début du corps principal du programme par la procédure **randomize**) ».
Cette précision est utile puisque ladite fonction random n'est pas explicitement au programme officiel. Elle reste cependant quasiment indispensable pour les exercices de simulation.
Notons qu'il existe une autre fonction « random » dans le PASCAL, cette fois-ci sans argument, et qui rend un réel au hasard dans l'intervalle [0,1[.

Grâce à cette dernière fonction, dans les exercices suivants, on utilisera une fonction B ayant pour paramètre un réel p (compris entre 0 et 1) qui simule une variable de Bernoulli de paramètre p, c'est à dire que proba(B(p) = 1) = p et proba(B(p) = 0) = 1-p.

```
function B(p:real):integer;
begin
     if (random<p) then B:=1
                   else B:=0;
end;
```

Nous donnons ici explicitement la description de cette fonction mais ce n'est qu'en deuxième année que votre professeur pourra expliquer, à l'aide du cours sur les variables aléatoires à densité, pourquoi cette fonction B suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

- <u>Comment peut-on estimer, par simulation, l'espérance d'une variable aléatoire X ?</u>
Anticipons un peu sur le programme de seconde année :
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé ayant une espérance et une variance et soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variables aléatoires identiques et indépendantes suivant toutes la même loi que X.

On note m leur espérance commune c'est à dire l'espérance de X. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On a alors le théorème suivant (démontré plus loin):

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_n) = E(X),\ \lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$$

$$\text{et } \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} p(|T_n - E(X)| > \varepsilon) = 0$$

Ceci prouve donc que, « lorsque n tend vers $+\infty$ » la variable T_n est quasi constante et égale à E(X) et que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand, T_n a une forte probabilité d'être une valeur approchée à ε près de E(X).

<u>Pratiquement</u>, on calculera n réalisations $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ de la variable X (par une boucle **for** k :=1 **to** n , n étant un « grand » entier naturel) et on estimera E(X) par leur moyenne arithmétique : $\frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n}$. Par exemple , si la variable X est simulée par une fonction $X(\dots)$ de PASCAL :

```
function Esperance : real ;

    var S : real ; {somme partielle pour le calcul de la
              moyenne)
      k : integer ;

    begin
            S :=0 ;
            for k := 1 to 1000 do S := S+X(…) ;
            Esperance := S/1000 ;
    end ;
```

- <u>Comment peut-on estimer, par simulation, la probabilité d'un événement *A* ?</u>

Soit *A* un événement d'un espace probabilisé Ω. Notons X_A la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque *A* est réalisé et 0 dans le cas contraire (c'est la fonction caractéristique de *A* !). X_A suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = p(X_A = 1) = p(A)$ donc son espérance est $E(X_A) = p(A)$. Il suffit donc d'estimer $E(X_A)$ par la méthode précédente pour estimer $p(A)$, par exemple si l'événement *A* est simulé par une condition *A* :

```
function simul : real ;

    var S,k : integer ;
  proba_de_A : real ;
    begin
            S :=0 ;
            for k := 1 to 1000 do
                    if (A est réalisé) then S := S+1 ;
            proba_de_A := S/1000 ;
    end ;
```

<u>Preuve du théorème :</u>

Par linéarité de l'espérance :

$$E(T_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n} nm = m$$

Ce qui signifie que T_n et X ont la même espérance.

De plus, si l'on note σ^2 leur variance commune, pour tout *i*, $Var(X_i) = E(X_i^2) - \left(E(X_i)\right)^2$, donc $E(X_i^2) = Var(X_i) + \left(E(X_i)\right)^2 = \sigma^2 + m^2$; les variables X_i étant indépendantes, on peut écrire :

$$Var(T_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

D'où l'on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(Var(T_n)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) = 0$ et par l'inégalité de Bienaymé-Tchébytchev :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(\left|T_n - \underbrace{E(T_n)}_{E(X)}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\overbrace{V(T_n)}^{\sigma^2/n}}{\varepsilon^2}$$

D'où le résultat lorsqu'on fait tendre *n* vers $+\infty$.

Exercice 1

On réalise successivement des épreuves à deux issues (succès ou échec) identiques et indépendantes telles que la probabilité d'obtenir un succès lors d'une expérience est un réel *p* appartenant à]0 ;1[. On code les succès par des 1 et les échecs par des 0. On obtient ainsi des suites de 1 et de 0, par exemple le résultat d'une expérience pourrait être : 00111110010101 … On appelle X_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série de résultats identiques (ici deux 0) et X_2 la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série de résultats identiques (ici cinq 1) ;
Dans cet exemple on a donc $X_1 = 2$ et $X_2 = 5$.

1°) Donner la loi de la variable aléatoire X_1.

2°) Donner la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance. Que constate-t-on ?

3°) Indiquez ce que simule la procédure suivante (utilisant la fonction B décrite dans les principes généraux) et indiquez ce que représente le contenu de la variable L après l'exécution de cette procédure.

```
procedure experience(var L:integer);

var t1,t2,tirage : integer;

begin
  t1:=B(q);
  repeat
     tirage:=B(q);
  until (tirage<>t1);

  L:=0;
  t2:=tirage;
  repeat
     L:=L+1;
     tirage:=B(q);
  until (tirage <> t2);
end;
```

4°) On exécute le programme suivant (utilisant la procédure précédente) , que s'attend-on à ce qu'il affiche ?

```
program ex1;
{codage : Pile=1, Face=0}
const N_essai = 10000;
      q = 0.3;

var sommelong,long,k : integer;
```

```
begin
randomize;
sommelong:=0;
for k:=1 to N_essai do
    begin
       experience(long);
       sommelong:=sommelong+long;
    end;

writeln(sommelong/N_essai);
end.
```

Solution :

1°) Notons, pour tout entier naturel non nul k, Pk l'événement « avoir PILE au $k^{\text{ième}}$ lancer » et Fk l'événement « avoir FACE au $k^{\text{ième}}$ lancer »

$X_1(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et compte tenu de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement {P1,F1}, $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(X_1=k)=p(X_1=k \text{ et } P1)+p(X_1=k \text{ et } F1)$, c'est à dire :

$\underline{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(X_1=k)=p(P_1....P_kF_{k+1})+p(F_1...F_kP_{k+1})=p^k(1-p)+(1-p)^k p}$

2°) On a bien sûr $X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et de la même façon : $\forall(k,l)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$,

$p(X_1=k \text{ et } X_2=l)=p(P_1...P_kF_{k+1}...F_{k+l}P_{k+l+1})+p(F_1...F_kP_{k+1}...P_{k+l}F_{k+l+1})$,

c'est à dire :

$$\boxed{\forall(k,l)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ p(X_1=k \text{ et } X_2=l)=p^{k+1}(1-p)^l+(1-p)^{k+1}p^l}$$

On en déduit la loi marginale par la formule de votre cours :

$$\forall l\in\mathbb{N}^*,\ p(X_2=l)=\sum_{k=1}^{+\infty}p(X_1=k \text{ et } X_2=l)=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{k+1}(1-p)^l+(1-p)^{k+1}p^l$$

c'est à dire :

$\forall l\in\mathbb{N}^*,\ p(X_2=l)=(1-p)^l\sum_{k=1}^{+\infty}p^{k+1}+p^l\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k+1}$ et puisque p et 1-p appartiennent tous les deux à]0 ;1[: $\boxed{p(X_2=l)=(1-p)^l\dfrac{p^2}{1-p}+p^l\dfrac{(1-p)^2}{p}}$

On rappelle que la série de terme généra nx^n converge si et seulement si $|x|<1$ et qu'alors sa somme est $\dfrac{x}{(1-x)^2}$, donc les séries de termes généraux $l(1-p)^l$ et lp^l convergent puisque p et 1-p appartiennent tous les deux à]0 ;1[donc X_2 a une espérance et

$$\mathrm{E}(X_2)=\sum_{l=1}^{+\infty}lp(X_2=l)=\frac{p^2}{1-p}\sum_{l=1}^{+\infty}l(1-p)^l+\frac{(1-p)^2}{p}\sum_{l=1}^{+\infty}lp^l=$$
$$=\frac{p^2}{1-p}\frac{1-p}{p^2}+\frac{(1-p)^2}{p}\frac{p}{(1-p)^2}=1+1=2$$

c'est à dire : $\boxed{\mathrm{E}(X_2)=2}$

3°) la boucle :

```
t1:=B(q);
repeat
   tirage:=B(q);
until (tirage<>t1);
```

stocke le résultat du premier tirage dans t1 (pile = 1 et face =0) et tant que les tirages suivants sont identiques au premier, on effectue de nouveaux tirages.

La boucle :

```
L:=0;
t2:=tirage;
repeat
   L:=L+1;
   tirage:=B(q);
until (tirage <> t2);
```

stocke le nouveau tirage (forcément distinct de t1) dans t2 et tant que ce tirage est identique à t2 on procède à un nouveau tirage et on augmente L de 1. A la fin de cette boucle, L contient donc la longueur de la deuxième série de pile ou face, c'est à dire X_2.

Ainsi la procédure « Experience » a pour effet de stocker dans la variable L la valeur de X_2.

Noter au passage que le paramètre L est bien passé « par variable ».

4°) La boucle :

```
for k:=1 to N_essai do
    begin
       experience(long);
       sommelong:=sommelong+long;
    end;
```

a pour effet de réaliser 10000 expériences du type précédent où on l'on totalise les résultats des 10000 valeurs de X_2 obtenues ; la ligne :

« `writeln(sommelong/N_essai);` »

affiche $\dfrac{X_2(\omega_1)+...+X_2(\omega_{10000})}{10000}$ c'est à dire, d'après les principes généraux ci-dessus, une estimation de $\mathrm{E}(X_2)$ qui est d'ailleurs exactement égale à 2).

<u>A la fin de l'exécution du programme, on s'attend donc à ce qu'une valeur numérique proche de 2 soit affichée.</u>

Exercice 2

(d'après HEC Math 2 option E 2001)

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on place dans un sac n jetons numérotés de 1 à n et on les tire au hasard un à un du sac sans remise. On note $(a_1,\ldots,a_n)$ les numéros des jetons tirés dans l'ordre de leur apparition. On obtient ainsi à chaque expérience une permutation de $[\![1;n]\!]$. On suppose qu'on a autant de chances d'obtenir telle permutation plutôt que telle autre, donc la probabilité d'obtenir une permutation donnée est $\dfrac{1}{n!}$. On note L_1 la longueur de la première sous-suite croissante, L_2 la longueur de la seconde sous-suite croissante et T le nombre de sous-suites croissante dans la permutation $(a_1,\dots,a_n)$; Par exemple, dans le cas où n = 8, si on a obtenu la permutation (5,6,4,1,2,3,8,7) alors $L_1 = 2$ à cause de la première sous-suite croissante (5,6), $L_2 = 1$ à cause de la seconde sous-suite croissante (4) et les sous-suites croissantes sont respectivement (5,6), (4), (1,2,3,8) et (7) : il y en a donc 4 et par conséquent T = 4.

1°) Déterminer la loi de L_1 ainsi que son espérance et la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

2°) Dans le langage PASCAL on peut aussi utiliser la fonction « random » avec un paramètre entier strictement positif, ainsi lorsque q est un entier naturel non nul, random(q) est un entier choisi au hasard par l'ordinateur suivant une loi uniforme sur $\{0,\dots,q-1\}$.

Dans un programme écrit en PASCAL, figurent
- une constante n donnée,
- la déclaration type tableau = array[1..n] of integer
- la procédure :

```
procedure aleatoire(var A : tableau);
var aux, i, alea : integer;
begin
     for i:=1 to n do A[i]:=i;
     for i:=n downto 2 do
            begin
            alea:=random(i)+1;
            aux:=A[alea];
            A[alea]:=A[i];
            A[i]:=aux;
            end;
end;
```

a) Expliquer pourquoi cette procédure permet de simuler l'expérience aléatoire définie au début de l'exercice.

b) Ecrire une fonction d'entête **function** T(A : tableau) : **integer** qui renvoie le nombre de sous-suites croissantes du tableau A correspondant à une permutation de $\{1,\dots,n\}$.

c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la longueur de la première sous-suite croissante du tableau A :

```
function L1(A : tableau):integer;
var k : integer;
begin
k:= . . . ;
while (k<=n-1) and . . .  do k:=k+1;
L1:= . . .;
end;
```

d) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la longueur de la seconde sous-suite croissante du tableau A :

```
function L2(A : tableau):integer;

var k,long2 : integer;
begin
k:=. . .;{se servir de la fonction L1 !)
while . . . and . . . do . . .;
L2:= . . .;
end;
```

e) compléter le programme principal suivant afin qu'il affiche une estimation de E(T) et de E(L2).

```
var Tab : tableau;
          j,S,SP : integer;

begin
randomize;
S:=0;SP:=0;
for j:=1 to 3000 do
    begin
     aleatoire(Tab);
     S:=. . .;SP:=. . .;
    end;
writeln(. . . ; . . .);
end.
```

Solution :

1°) Notons que $L_1(\Omega)=\{1,\dots,n\}$ et que pour tout k de $\{1,\dots,n\}$, l'événement $[L_1 \geq k]$ est l'événement « les k premiers numéros sont dans l'ordre croissant », or parmi les A_n^k possibilités de résultats équiprobables pour $(a_1,\dots,a_k)$ il y a exactement C_n^k k-listes strictement croissantes, ainsi

$p[L_1 \geq k] = \dfrac{C_n^k}{A_n^k} = \dfrac{1}{k!}$; en particulier $p[L_1 = n] = p[L_1 \geq n] = \dfrac{1}{n!}$ et pour tout k de $\{1,\dots,n-1\}$,

$$p[L_1 = k] = p[L_1 \geq k] - p[L_1 \geq k+1] = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \ ;$$

D'où la loi de L_1. De plus

$$E(L_1) = \sum_{k=1}^{n} kp[L_1 = k] = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) + n\frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

c'est à dire :

$$E(L_1) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

soit en simplifiant : $\boxed{E(L_1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}}$ et donc, lorsque n tend vers $+\infty$, <u>E(L_1) tend vers e-1.</u>

2°) a) Dans la procédure « aleatoire » au départ, le tableau A est rempli avec les nombres 1, 2, …, n dans cet ordre puis chaque case de A[2] à A[n] est échangée avec une case choisie au hasard (éventuellement elle-même). Ainsi, on réalise bien une permutation de $\{1,.., n\}$. La preuve qu'on a, par ce procédé, autant de chance d'obtenir telle permutation plutôt que telle autre demanderait un travail très certainement hors de la portée des élèves de prépas !

b) La solution suivante, reposant sur le fait que le nombre de sous-suites croissantes d'un tableau A est égal au nombre de couples (a_k, a_{k+1}) qui ne sont pas dans l'ordre croissant, augmenté de 1. En effet, a_1 est toujours le début de la première sous-suite croissante (cette sous-suite «étant éventuellement réduite à (a_1)), pour qu'il y ait une seconde sous-suite croissante, il faut qu'il existe k tel que $a_k > a_{k+1}$, et ainsi de suite. Par exemple, si $n = 6$ et si A=[1 4 3 2 6 5], les sous-suites croissantes sont (1 4), (3), (2 6) et (5) donc T = 4 et les couples successifs décroissants sont (4 3), (3 2) et (6 5) qui marquent tous la fin et le début de deux suites croissantes successives. Il y en a bien 3 et 3 + 1 = 4 = T.
D'où :

```
function T(A:tableau) : integer;
var C, k : integer;
begin
C:=0;
for k:=1 to n-1 do
    begin
        if (A[k]>A[k+1]) then C:=C+1;
    end;
T:=C+1;
end;
```

c)

```
function L1(A : tableau):integer;
var k : integer;
begin
k:=1;
{puis, on parcourt la suite tant qu'elle est croissante}
while (k<=n-1) and (A[k]<A[k+1]) do k:=k+1;
L1:=k;{L1 est le dernier indice atteint}
end;
```

d)

```
function L2(A : tableau):integer;
var k,long2 : integer;
begin
{c'est un peu la même fonction que L1, sauf qu'on démarre le
comptage juste après la première sous-suite croissante !}
k:=L1(A)+1;
while (k<=n-1) and (A[k]<A[k+1]) do k:=k+1;
L2:=k-L1(A);
end;
```

e)Ici on va appliquer ce qui a été vu dans les principes généraux en cherchant la moyenne de 3000 valeurs de T et la moyenne de 3000 valeurs de L2. (Le chiffre 3000 nous assure qu'on a fait un « grand nombre » d'essais mais ne nous permet pas de déterminer la précision de l'estimation obtenue !)

```
begin
randomize;
S:=0;SP:=0;
for j:=1 to 3000 do
    begin
     aleatoire(Tab);
     S:=S+T(Tab);SP:=SP+L2(Tab) ;
    end;
writeln(S/3000,' ',SP/3000);
end.
```

Exercice 3

(d'après Ecricome 2001 S)

Soit n un entier positif ou nul, a un entier pair supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Un joueur effectue une succession de lancers d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p. On note F_n la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du nième lancer sachant qu'au départ $F_0 = a$. Pour tout entier naturel n, avant le lancer n+1, le joueur mise une partie X_n, entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$, sur face. On suppose que, pour tout entier naturel k, la loi conditionnelle de la variable X_n sachant $\{F_n = k\}$ est une loi binomiale de paramètres k et r, r étant un réel de $]0,1[$. Si le lancer n+1 fait apparaître pile, sa fortune devient $F_{n+1} = 2X_n$, s'il fait apparaître face, sa fortune devient $F_{n+1} = 2(F_n - X_n)$.

On considère le programme suivant dans lequel on utilise la fonction B décrite dans les principes généraux :

```
program simulation;
var a,n,i,X,F : integer;
        r,p : real;
function mise(m:integer; s:real) : integer;
        ..................
        end;
{programme principal}
begin
randomize;readln(n);readln(p);readln(r);readln(a);F:=a;
for i:=1 to n do
            begin X:=mise(F,r);
                if B(p)=1 then ..................
                .....................................
            end;
end.
```

La fonction "mise" est une fonction qui simule une loi binomiale de paramètres m et s. Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire comprise au sens large entre 0 et m, la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par loi binomiale de paramètres m et s.

1°) Rédiger les lignes manquantes (déclarations et instructions) dans la définition de la fonction "mise".

2°) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives $F_1, ..., F_n$ du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.

Solution :

```
program ex3;

var a,n,i,X,F : integer;
         r,p : real;

function mise(m:integer;s:real):integer;
{simulation d'une variable aléatoire suivant une loi B(m,s)
à l'aide de m expériences de Bernoulli de paramètre s}
var k,Somme : integer;
begin
     Somme:=0;
     for k:=1 to m do
         if (B(s)=1) then Somme:=Somme+1;
       {On comptabilise les succès c'est à dire les 1 sur les
       m expériences ; notons qu'on aurait pu remplacer cette
       ligne par :Somme := Somme + B(s)}

      mise:=Somme;
end;

{programme principal}
begin
randomize;
readln(n);readln(p);readln(r);readln(a);
F:=a;
for i:=1 to n do
    begin
       X:=mise(F,r);
       if B(p)=1 then F:=2*X else F:=2*(F-X);
       writeln(F);
    end;
end.
```

Exercice 4

(d'après HEC Maths2 99)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant des boules de couleurs C_1,C_2 et C_3. Les boules de couleur C_i sont en proportion p_i telle que $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ et $p_3 = \frac{1}{2}$. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. Pour tout i de $\{1,2,3\}$,on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules de couleur C_i obtenues à l'issue des n tirages.

On suppose avoir défini dans un programme Pascal le Type Tableau = Array[1..100] of integer ;

a) Ecrire, à l'aide de la fonction random, une procédure « Tirage(var C : tableau) » permettant de simuler le tirage avec remise de 100 boules de couleur C_1 ou C_2 ou C_3 en proportion $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}$ respectivement.
L'élément C[i] vaut 1, 2 ou 3 et représente la couleur de la $i^{\text{ième}}$ boule tirée (C_1, C_2 ou C_3).

b) Ecrire une fonction « Difference » de paramètre C qui retourne la valeur de $X_1 - X_2$.

c) Utiliser la fonction précédente pour évaluer l'espérance de $X_1 - X_2$; que s'attend-on à obtenir comme résultat ?

Solution :

```
a) program ex4;

type tableau = Array[1..100] of integer;

procedure Tirage (var C : tableau);
var k,num : integer;

begin

for k:=1 to 100 do
    begin
      num:=random(4); {nbre au hasard entre 0 et 3}
      if (num = 0) then C[k]:=1 {donc sur 1/4 des cas}

             else
               begin
                  if (num = 1) then C[k]:=2
                              {donc sur 1/4 des cas}
                               else C[k]:=3;
                              {donc sur 1/2 des cas}
               end;
```

{ainsi est-on sûr que C[k] vaut 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$, 2 une probabilité $\frac{1}{4}$ et 3 avec une probabilité $\frac{1}{2}$ } .

```
     end;

end;


b) function difference (var C : tableau):integer;

var diff,k : integer;

begin
Tirage(C);{on effectue un tirage aléatoire à l'aide de la procé-
dure précédente, lequel est codifié et stocké dans le tableau C}
diff:=0;
```

```
for k := 1 to 100 do
    begin
        if (C[k]=1) then diff:=diff+1;
                {X1 augmente de 1 dans
                 ce cas}
                        if (C[k]=2) then diff:=diff-1;
                {X2 augmente de 1 dans
                ce cas}
    end;
difference:=diff;
{c'est donc bien X1 - X2}
end;


{programme principal}
var Couleur : tableau;
    S,k : integer;

begin
{On réalise une estimation de l'espérance de X1 - X2 en réalisant
3000 tirages de 100 boules selon les principes généraux énoncés
plus haut}.
randomize;
S:=0;
for k:=1 to 3000 do S:=S+difference(Couleur);
writeln('estimation de E(X1-X2) : ',S/3000);
end.
```

c) On s'attend à ce que le programme affiche une valeur proche de 0 : en effet, pour tout i appartenant à {1,…, 3}, X_i le nombre de succès sur 100 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes (succès = une boule de couleur C_i est obtenue) telles que la probabilité d'obtenir un succès lors d'une expérience est p(la couleur de la boule est C_i). Donc X_1 et X_2 suivent toutes les deux la même loi binomiale B(100,1/4). Donc X_1 et X_2 ont une espérance et $E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0$.

Exercice 5

(d'après HEC Maths3 Eco 2001 ex2)

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle S_n le nombre de fois où pile a été obtenu sur n lancers.

1°) Donner la loi, l'espérance et la variance de S_n.

2°) Démontrer que, pour tout réel r vérifiant $0 < r < ½$,

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^r}\right)=0\,.$$

3°) Dans le langage PASCAL on peut aussi utiliser la fonction « random » avec un paramètre entier strictement positif, ainsi lorsque q est un entier naturel non nul, random(q) est un entier choisi au hasard par l'ordinateur suivant une loi uniforme sur $\{0,\ldots,q-1\}$.
On considère le programme suivant :

```
program ex5;
Const
   nombre_de_lancers = 20000;

var S :integer ;

procedure EP(m : integer);
   var i,X : integer ;
        begin
          S:=0;
          for i:=1 to m do
              begin
               X:=random(100);
               if X > 49 then S:=S+1;
              end;
        end;

{programme principal}
 Var
  n,U,j : integer;

begin
      randomize;
      n:=nombre_de_lancers;
      U:=0;
            for j:=1 to 2000 do
        begin
         EP(n);
         if Abs(S/n-0.5) > exp(-0.4*Ln(n)) then U:=U+1;
        end;
      writeln('P1 = ',U/2000);
end.
```

a) Que fait la procédure EP de ce programme ?
b) Quel nombre entier est comptabilisé dans la variable U à la fin de l'exécution du programme ?
c) De quel nombre la valeur de P1 fournie pae l'exécution du programme est-elle une estimation ?
d) A quoi peut-on s'attendre pour la valeur de P1 ?

Solution :

1°) On a ici le contexte classique de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles le succès représente « pile » qui est obtenu avec une probabilité ½ , S_n est le nombre de succès obtenus lors des n expériences par conséquent, S_n suit une loi binomiale de paramètres n et ½, son espérance et sa variance sont donc : $E(S_n)=\frac{n}{2}$ et $V(S_n)=\frac{n}{4}$.

2°) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébytcheff, la variable aléatoire $X=\frac{S_n}{n}$ est une variable aléatoire ayant une espérance et une variance alors $\forall\varepsilon>0,\ p\left(\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$, or

$E(X)=E\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n}E(S_n)=\frac{1}{2}$ et $V(X)=V\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(S_n)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{4}=\frac{1}{4n}$ et en prenant

$\varepsilon=\frac{1}{n^r}$, on a donc $p\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^r}\right)\leq\frac{1/4n}{\left(1/n^r\right)^2}$ donc $0\leq p\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^r}\right)\leq\frac{1}{4n^{1-2r}}$ et puisque

par hypothèse $0 < r < ½$, on a donc $1-2r>0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4n^{1-2r}}=0$ et

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}p\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^r}\right)=0}$

3 a). Dans la procedure EP, X vaut random(100), X suit donc une loi uniforme sur $\{0,\ldots,99\}$ et par conséquent :

$p(X>49)=\sum\limits_{k=50}^{100}p(X=k)=50\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{2}$. la ligne : La ligne X = random(100) simule donc le lancer d'une pièce en convenant que ($X > 49$) traduit l'obtention de « pile » alors que « $X \leq 49$ » traduit l'obtention de « face » et on bien : $p(\text{Pile})=p(X>49)=\frac{1}{2}$. « if $X > 49$ then S:=S+1 » augmente donc S de 1 si on a eu Pile et n'augmente pas S si on a eu Face ., S mesure donc bien le nombre de « Piles » obtenus lors de m lancers. Ceci prouve donc que l'exécution de la procédure EP(m) a pour effet de mettre dans la variable globale S la valeur de S_m pour un essai de m lancers d'une pièce équilibrée.

b). U est initialisé à 0 et est augmenté de 1 à chaque fois que l'événement $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^{0,4}}$ est réalisé,

donc :

<u>U est le nombre de fois où, sur 2000 expériences, l'événement $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^{0,4}}$ a été réalisé.</u>

c) A la fin de son exécution, le programme affiche « P1= » suivi de la valeur de U/2000, c'est à dire la fréquence de réalisation de l'événement $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^{0,4}}$. Comme on l'a vu dans les principes généraux plus haut dans cet article, il s'agit d'une estimation de $p\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{n^{0,4}}\right)$.

d) Mais puisque ici n est grand (n vaut 20000), on s'attend à ce que cette probabilité soit proche de la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$, c'est à dire 0.

Exercice 6 : la loi Hypergéométrique

On considère le programme suivant (l'instruction « random(N) » a été expliquée à l'exercice précédent).

```
program ex6 ;

function T(N,m,a:integer):integer;

var Poignee : array[1..10] of integer;
    S, k, numero : integer;

begin
  for k:=1 to N do Poignee[k]:=0;
  for k:=1 to m do
        begin
          repeat
            numero :=1+random(N);
          {numéro est donc un nombre
          pris au hasard entre 1 et
          N}
          until (Poignee[numero]=0);
          Poignee[numero]:=1;
        end;

S:=0;
  for k:=1 to a do
         if (Poignee[k]=1) then S:=S+1;
  T:=S;
end;


{Programme principal}
const n_essais = 1000;

var P : real;
    N, k, m, a,j : integer;
    U : array[0..20] of integer;
Begin
for k:=0 to 20 do U[k]:=0;
randomize;
N:=10;m:=4;a:=6;
for k:=1 to n_essais do
    begin
         j:=T(N,m,a);
         U[j]:=U[j]+1;
    end;
for k:=0 to N do writeln(U[k]/n_essais);

end.
```

1°) On suppose que N = 10, m = 4 et a = 6 et que, lors d'un calcul de T(N, m, a), random(N) a donné successivement les valeurs 7, 1, 3, 3, 6. Indiquer le contenu de la variable « poignee » à la fin de ce calcul de T(N, m, a) ainsi que la valeur de T(N, m, a) dans ce cas.

Revenons au cas général :

2°) La fonction T simule une variable aléatoire ; quelle est la loi de cette variable aléatoire (appelée encore T).

3°) Lorsqu'on exécute ce programme, qu'affiche-t-il a la fin ?

4°) Quelles instructions faudrait-il ajouter au programme pour qu'il affiche une estimation de l'espérance de T ?

Solution :

1°) Au départ le tableau poignee est initialisé à :

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

k varie de 1 à 4 et
lorsque k=1 numero = 1 + 7 = 8 et poignee[8]=0 donc poignee[8] passe à 1
lorsque k=2 numero = 1 + 1 = 2 et poignee[2]=0 donc poignee[2] passe à 1
lorsque k=3 numero = 1 + 3 = 4 et poignee[4]=0 donc poignee[4] passe à 1
lorsque k=4 numero = 1 + 3 = 4 et poignee[4]=1 donc il y a retirage :
numero = 1 + 6 = 7 et poignee[7]=0 donc poignee[7] passe à 1
finalement le tableau poignee est devenu :

0	1	0	1	0	0	1	1	0	0

2°) Dans la première boucle T initialise le tableau poignee à 0 puis, dans une seconde boucle T met à 1 m cases distinctes de ce tableau (si la case est déjà à 1, T en tire au hasard une autre jusqu'à ce qu'elle soit différente de celles précédemment choisies). Enfin, dans la boucle :

```
S:=0;
  for k:=1 to a do
           if (Poignee[k]=1) then
                                S:=S+1;
  T:=S;
```

La variable S compte le nombre de cases parmi les a premières qui contiennent 1. Finalement T vaut S. Ainsi T(N, m, a) est égale au nombre de cases du tableau parmi les a premières qui ont été mises à 1. Résumons : sur N cases, on en choisit n distinctes et T est égal au nombre de cases choisies dont les numéros sont entre 1 et a. D'après le cours, on peut conclure que :

T suit une loi hypergéométrique de paramètres N, m et a.

3°) Dans le programme principal, $N = 10$, $m = 4$ et $a = 6$, U est un tableau de 20 cases initialisées à 0 et on calcule 1000 résultats de T : $T(\omega_1),\dots,T(\omega_{1000})$, j prend successivement ces 1000 valeurs, donc j appartient à l'ensemble $T(\Omega)$ qui est lui-même égal à $\{0,\dots,4\}$ puis que T suit une loi $\boldsymbol{H}(N, m, a)$, donc les valeurs prises par j sont comprises entre 0 et 4 et :
U[0] contient le nombre de fois où, sur 1000 essais, T a donné 0,
U[1] contient le nombre de fois où, sur 1000 essais, T a donné 1,
U[2] contient le nombre de fois où, sur 1000 essais, T a donné 2,
U[3] contient le nombre de fois où, sur 1000 essais, T a donné 3 et enfin
U[4] contient le nombre de fois où, sur 1000 essais, T a donné 4,
et pour tout k compris entre 1 et 10, $U[k]/1000$ contient la fréquence des cas où on a eu $T = k$ c'est à dire une estimation de $p(T = k)$ comme on l'a vu dans les principes généraux (voir plus haut dans cet article : « *Comment peut-on estimer, par simulation, la probabilité d'un événement A ?* »). Bien sûr, dès que k dépasse 4, cette estimation est nulle.

Conclusion : à la fin de son exécution, le programme affiche des estimations de $p(T = k)$ pour k variant de 0 à 10.

4°) Comme on a vu dans les principes généraux, on estimera l'espérance de T, en calculant $\dfrac{T(\omega_1)+\dots+T(\omega_{1000})}{1000}$. Ce qui nous amène à modifier le programme principal comme suit :

```
var P,somme : real;
    N, k, m, a,j : integer;
    U : array[0..20] of integer;
Begin
for k:=0 to 20 do U[k]:=0;
randomize;
N:=10;m:=4;a:=6;somme:=0 ;
for k:=1 to n_essais do
    begin
         j:=T(N,m,a);
         U[j]:=U[j]+1;
         somme :=somme + j ;{on ajoute
                        T(ωk)à la somme}
    end;
for k:=0 to N do
                writeln(U[k]/n_essais);
writeln('on estime E(T) par :',somme/1000) ;
end.
```

Exercice 7

On retrouve le contexte probabiliste suivant dans quelques problèmes de concours (par exemple **Edhec 97 option S ou encore ESC 97 math 3 option E ex3**

On dispose de deux urnes U et V. Initialement, l'urne U est vide et l'urne V contient N boules numérotées de 1 à N.
On effectue une suite d'épreuves, chacune consistant à choisir au hasard un nombre compris entre 1 et N, puis à transférer la boule portant ce numéro de l'urne dans laquelle elle est vers l'autre urne.
On considère alors le début de programme suivant :

```
program ex7 ;

const N = 12;

type urne = array[1..N] of integer ;

{un tableau W de type « urne» contient N cases remplies avec des
0 ou des 1, modélisant ainsi la présence de la boule numéro i
dans l'urne W par W[i]=1 ou au contraire son absence par
W[i]=0.}

var U, V : urne ;

function compte(W : urne) :integer ;
         . . . . . . . .

procedure Experience ;
  . . . . . . . .
```

1°) Ecrire la fonction compte qui prend en argument l'urne W et rend le nombre de boules présentes dans ce tableau.

2°) Ecrire la procédure Experience (sans argument) qui choisit un nombre entier h au hasard entre 1 et N et qui échange d'urne la boule numéro h.

3°) k désignant un entier naturel inférieur ou égal à N, écrire une fonction :

function X(k :integer) : integer

utilisant la fonction et la procédure précédente afin qu'elle simule la variable aléatoire X_k égale au nombre d'épreuves qu'il faut effectuer pour que l'urne U ait pour la première fois k boules (Noter que X_0 est alors la variables certaine égale à 0 et que X_1 est la variable certaine égale à 1).

4°) Ecrire un programme utilisant tout ce qui précède et qui affiche une estimation du nombre moyen d'expériences qu'il faut effectuer pour que, pour la première fois, l'urne V soit vide.

5°) **Etude théorique du nombre moyen d'expériences qu'il faut effectuer pour que, pour la première fois, l'urne V soit vide** (c'est à dire E(X_N)).

a) Soit Z une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé Ω et admettant une espérance. On considère un événement A tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$. Démontrer que les variables aléatoire « Z sachant A » et « Z sachant $\overline{A}$ » ont chacune une espérance et que $E(Z) = p(A).E\left(Z\middle|A\right) + p(\overline{A}).E\left(Z\middle|\overline{A}\right)$.

b) Pour tout entier j compris entre 0 et $N - 1$, on pose $N_j = X_{j+1} - X_j$. N_j est donc le nombre d'épreuve juste nécessaire pour que, l'urne U contenant j boules, elle contienne pour la première fois $j + 1$ boules. Démontrer que N_j a une espérance (notée μ_j).

c) On considère, si j est un entier compris entre 1 et $N - 1$, l'événement :

$A_j =$ « entre le moment où U a eu pour la première fois j boules et le moment où U a eu pour la première fois $j + 1$ boules, il y a eu une seule épreuve »

Démontrer que la variable aléatoire « N_j sachant $\overline{A_j}$ » est égale à $1 + N_{j-1} + N_j$. En déduire que $\mu_j = \dfrac{N + j\mu_{j-1}}{N - j}$. En déduire une fonction « esperance) ayant pour argument un entier k (supposé compris entre 1 et N) rendant E(X_k)

d) En déduire une fonction « esperance) ayant pour argument un entier k (supposé compris entre 1 et N) rendant E(X_k)

6°) On se place dans le cas particulier où $N = 6$; Pour tout entier naturel non nul m on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U à l'issue de la $m^{\text{ième}}$ épreuve.

a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul m on a : $p\left(Y_{m+1} = 0\right) = \dfrac{1}{6} p(Y_m = 1)$

Pour tout entier k de $\{1, \ldots, 5\}$:

$$p\left(Y_{m+1} = k\right) = \frac{7-k}{6} p\left(Y_m = k-1\right) + \frac{k+1}{6} p\left(Y_m = k+1\right)$$

et $p\left(Y_{m+1} = 6\right) = \dfrac{1}{6} p(Y_m = 5)$

b) En déduire que pour tout entier naturel m non nul : $E\left(Y_{m+1}\right) = \dfrac{2}{3} E\left(Y_m\right) + 1$; en déduire $E\left(Y_m\right)$ en fonction de n ainsi que sa limite lorsque m tend vers $+\infty$.

7°) Ecrire en PASCAL une fonction Y(m : integer) de type integer qui simule la variable aléatoire Y_m.

Solution :

1°)
```
function compte(W : urne) :integer ;
      var k,S : integer ;
begin
S := 0 ;
for k := 1 to N do
              if W[k]=1 then S :=S+1 ;
              {on parcourt les cases de
              l'urne W et si W[k]=1, cela signifie que la boule k est
              dans l'urne donc on augmente le compteur de 1}
compte := S ;
end ;
```

2°)
```
procedure Experience ;
var h : integer ;
begin
h :=1+random(N) ;
   {random(N) est un nombre au hasard entre 0 et N - 1 donc h est
   bien un nombre au hasard entre 1 et N}
if U[h]=1 then
   {si la boule n°h est dans l'urne U alors on la met dans V}
                   begin
                     U[h] :=0 ;
                     V[h] :=1 ;
                   end
              else
          {sinon, elle dans V donc on l'enlève de V et on la met
          dans U}
                 begin
                   U[h] :=1 ;
                   V[h] :=0 ;
                 end ;
end ;
```

3°)
```
function X(k:integer):integer;
var i : integer;

begin
    i:=0;
    while (compte(U)<>k) do
        {tant que U n'a pas encore
        eu k boules}

        begin
           Experience;
           {on réalise une épreuve}
           i:=i+1;
           {i compte ainsi le nombre
           d'expériences jusqu'à ce que U ait k boules}
        end;
X:=i;
end;
```

4°) L'urne V sera vide au bout de X_N épreuves d'où le programme principal utilisant ce qui précède et estimant son espérance par la méthode expliquée dans les principes généraux.

```
var i,k : integer;
    somme : real;
begin
randomize;somme:=0;
for i:=1 to 1000 do {on réalise les calculs de
X(ω₁),…, X(ω₁₀₀₀)}

begin
             {initialisation des deux urnes}
         for k:=1 to N do
                 begin
                 U[k]:=0;V[k]:=1;
                 end;
        somme:=somme + X(N);
    {on ajoute X(ωᵢ) à Somme}
end;
writeln(somme/1000);
{il s'agit bien d'une estimation de
E(X_N) par (X_2n(ω_1)+…+X_2n(ω_100))/1000 }
end.
```

5 a) $\forall k \in Z(\Omega)$, $p(Z=k) = p(Z=k|A)\,p(A) + p(Z=k|\overline{A})\,p(\overline{A})$ donc

$0 \le p(Z=k|A)\,p(A) \le p(Z=k)$ donc $0 \le k.p(Z=k|A) \le \dfrac{1}{p(A)}k.p(Z=k)$

Considérons la série de terme général $u_k = k.p(Z=k|A)$ $(k \in Z(\Omega))$. Pour tout k on a :

$0 \le u_k \le \dfrac{1}{p(A)}k.p(Z=k)$ or la série de terme général $k.p(Z=k)$ converge puisque, par hypothèse, E(Z) existe. D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, on peut donc conclure que la série de terme général $u_k = k.p(Z=k|A)$ $(k \in Z(\Omega))$ converge et que, par conséquent, $E(Z|A)$ existe. On montrerait de même que $E(Z|\overline{A})$ existe. De plus,

$E(Z) = \sum\limits_{k\in Z(\Omega)} k.p(X=k)$

$= \sum\limits_{k\in Z(\Omega)} k.\left[p(Z=k|A)\,p(A) + p(Z=k|\overline{A})\,p(\overline{A})\right]$ c'est à dire, puisque toutes les séries en présence sont convergentes :

E(Z)=$p(A)\sum\limits_{k\in Z(\Omega)} k.p(Z=k|A) + p(\overline{A})\sum\limits_{k\in Z(\Omega)} k.p(Z=k|\overline{A})$ d'où finalement : $\boxed{E(Z) = p(A).E(Z|A) + p(\overline{A}).E(Z|\overline{A})}$

5 b) N_j est la différence de deux variables aléatoires ayant toutes les deux des espérances, elle a donc elle-même une espérance.

5 c) Dire que l'événement $\overline{A}_j$ est réalisé c'est dire que lors de l'expérience qui a suivi le moment où U a eu pour la première fois j boules, U n'a pas récupéré une boule, au contraire elle en a perdu une, U ne contenait donc que $j-1$ boules, et V en contenait $N-j+1$. Pour qu'alors U se retrouve avec $j+1$ boules (pour la première fois) il faut $X_{j+1} - X_{j-1}$ épreuves. Or

$X_{j+1} - X_{j-1} = (X_{j+1} - X_j) + (X_j - X_{j-1}) = N_j + N_{j-1}$. Autrement dit, lorsque $\overline{A}_j$ est réalisé, pour que U se retrouve avec $j+1$ boules, il faut : 1 expérience correspondant à la perte d'une boule suivie de $X_{j+1} - X_{j-1} = N_j + N_{j-1}$ épreuves pour que U ait de nouveau $j+1$ boules. Ce qui prouve finalement que : $\boxed{N_j|\overline{A}_j = 1 + N_j + N_{j-1}}$.

D'autre part, si A_j est réalisé, alors le nombre d'épreuves justes nécessaires pour que U passe d'un contenu de j boules à un contenu de $j+1$ est 1, donc $N_j = 1$; Ainsi $\boxed{N_j|A_j = 1}$.

Utilisons alors le a) en prenant pour Z la variable aléatoire N_j. On sait que cette variable aléatoire a une espérance (voir b)) qui est notée μ_j et que $p(A_j) \ne 0$ et $\ne 1$, on peut donc appliquer le a) et affirmer que les variables $N_j|A_j$ et $N_j|\overline{A}_j$ ont des espérances et que

$E(N_j) = p(A_j).E(N_j|A_j) + p(\overline{A}_j).E(N_j|\overline{A}_j)$, c'est à dire :

$\mu_j = p(A_j).1 + p(\overline{A}_j).E(1 + N_{j-1} + N_j)$ et par linéarité de l'espérance :

$\mu_j = p(A_j).1 + p(\overline{A}_j).(1 + \mu_{j-1} + \mu_j)$. D'autre part, A_j s'obtient lorsque U contenant j boules (et donc V en contenant $N-j$) on tire un numéro au hasard parmi ceux qui se trouvent dans l'urne V, on a donc $N-j$ chances sur N pour que cela se produise. Ainsi p(A_j) $= \dfrac{N-j}{N}$. D'où les égalités successives :

$$\mu_j = \frac{N-j}{N} + \left(1 - \frac{N-j}{N}\right).\left(1 + \mu_{j-1} + \mu_j\right)$$

$$\mu_j = \frac{N-j}{N} + \left(1 - \frac{N-j}{N}\right).\left(1 + \mu_{j-1}\right) + \left(1 - \frac{N-j}{N}\right).\mu_j$$

$$0 = \frac{N-j}{N} + \left(1 - \frac{N-j}{N}\right).\left(1 + \mu_{j-1}\right) - \frac{N-j}{N}.\mu_j$$

$$\frac{N-j}{N}.\mu_j = \frac{N-j}{N} + \left(1 - \frac{N-j}{N}\right).\left(1 + \mu_{j-1}\right)$$

$$\mu_j = 1 + \frac{j}{N-j}.\left(1 + \mu_{j-1}\right) \text{ donc } \boxed{\mu_j = \frac{N + j\mu_{j-1}}{N-j}}$$

5 d) Soit *k* un entier supposé compris entre 1 et *N* ; On a, puisque $X_0 = 0$,

$X_k = \sum_{j=0}^{k-1}\left(X_{j+1} - X_j\right) = \sum_{j=0}^{k-1} N_j$ donc $E(X_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j$. Avec

$\mu_0 = E(N_0) = E(X_1) - E(X_0) = 1 - 0 = 1$. D'ou la fonction suivante qui calcule E(X_k) :

```
function esperance(k:integer):real;
var sompart,MU : real;
    j : integer;

begin
MU:=1; {initialisé à μ0
sompart:=0;
for j:=0 to (k-1) do
         begin
           MU:=(N+j*MU)/(N-j);
         {MU contient donc μj}
           sompart:=sompart + MU;
         {On ajoute μj à sompart}
         end;
esperance:=sompart;
end;
```

6 a) $\left(Y_{m+1} = 0\right) = (Y_m = 1$ et on a tiré au sort le n° de la boule de U$)$. Ces deux événements étant indépendants, cela se traduit par $p\left(Y_{m+1} = 0\right) = p(Y_m = 1)\cdot\frac{1}{6}$

De même si *k* appartient à {1,…,5}, $\left(Y_{m+1} = k\right)$ est la réunion des deux événements **incompatibles :**

$(Y_m = k-1$ et on a tiré au sort une des 6-(k-1) boules de V)

et $(Y_m = k+1$ et on a tiré au sort une des k+1 boules de U)

Par indépendance,

$p(Y_m = k-1$ et on a tiré au sort une des 6-(k-1) boules de V) $= \frac{6\text{-(k-1)}}{6}\, p\left(Y_m = k-1\right)$

de même : $p(Y_m = k+1$ et on a tiré au sort une des k+1 boules de U) $= \frac{\text{k+1}}{6}\, p\left(Y_m = k+1\right)$

D'où $p\left(Y_{m+1} = k\right) = \frac{7-k}{6} p\left(Y_m = k-1\right) + \frac{k+1}{6} p\left(Y_m = k+1\right)$

On prouve de même que $p\left(Y_{m+1} = 6\right) = \frac{1}{6} p(Y_m = 5)$.

6 b) On obtient en particulier, lorsque *k* varie de 1 à 6 :

$p\left(Y_{m+1} = 1\right) = p\left(Y_m = 0\right) + \frac{1}{3} p\left(Y_m = 2\right)$; $2p\left(Y_{m+1} = 2\right) = \frac{5}{3} p\left(Y_m = 1\right) + p\left(Y_m = 3\right)$

$3p\left(Y_{m+1} = 3\right) = 2p\left(Y_m = 2\right) + 2p\left(Y_m = 4\right)$; $4p\left(Y_{m+1} = 4\right) = 2p\left(Y_m = 3\right) + \frac{10}{3} p\left(Y_m = 5\right)$

$5p\left(Y_{m+1} = 5\right) = \frac{5}{3} p\left(Y_m = 4\right) + 5p\left(Y_m = 6\right)$; $6p\left(Y_{m+1} = 6\right) = p(Y_m = 5)$;

On peut alors additionner ces égalités membre à membre :

$$\sum_{k=0}^{6} kp\left(Y_{m+1} = k\right) = p\left(Y_m = 0\right) + \frac{5}{3} p\left(Y_m = 1\right) + \frac{7}{3} p\left(Y_m = 2\right) +$$
$$+3p\left(Y_m = 3\right) + \frac{11}{3} p\left(Y_m = 4\right) + \frac{13}{3} p\left(Y_n = 5\right) + 5p\left(Y_m = 6\right)$$

en tenant compte du fait que $p\left(Y_m = 0\right) + p\left(Y_m = 1\right) + ... + p\left(Y_m = 6\right) = 1$

cela donne :

$$\sum_{k=0}^{6} kp\left(Y_{m+1} = k\right) = 1 + \frac{2}{3} p\left(Y_m = 1\right) + \frac{4}{3} p\left(Y_m = 2\right) +$$
$$+2p\left(Y_n = 3\right) + \frac{8}{3} p\left(Y_n = 4\right) + \frac{10}{3} p\left(Y_n = 5\right) + 4p\left(Y_m = 6\right)$$

c'est à dire

$\sum_{k=0}^{6} kp\left(Y_{m+1} = k\right) = 1 + \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{6} p\left(Y_m = k\right)\right]$ c'est à dire enfin :

$\sum_{k=0}^{6} kp\left(Y_{m+1} = k\right) = 1 + \frac{2}{3} E(Y_m)$ d'où : $\boxed{E(Y_{m+1}) = 1 + \frac{2}{3} E(Y_m)}$.

La suite de terme général $E(X_m)$ est donc une suite arithmético-géométrique de premier terme $E(Y_1) = 1$ d'où par les techniques que tout bon élève se doit de connaître par cœur :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \; E\left(Y_m\right) = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} E\left(Y_m\right) = 3}.$$

7°) Pour simuler la variable Y_m, notons qu'il suffit d'effectuer m expériences, c'est à dire *m* exécutions de la procédure « Experience » puis de compter, à l'aide de la fonction « compte » le nombre de boules qui se trouvent dans l'urne U à l'issue des n expériences. Cela donne , la constante *N* étant initialisée à 6 (const $N = 6$ au début du programme) :

```
function Y(m : integer):integer;

var i : integer;
begin
  for i:=1 to m do Experience;
  Y:=compte(U);
end;
```

Deuxième partie
Calcul algébrique de base

Les épreuves de concours nécessitent une certaine aisance en calcul algébrique qui, reconnaissons-le, fait souvent défaut aux étudiants. Beaucoup ne savent pas démarrer un calcul, ne reconnaissent pas une identité remarquable, etc.
Le temps des vacances peut être l'occasion de faire des exercices qu'on a pas le temps de faire en classe mais qui s'avéreront rapidement rentables. Nous en proposons ici quelques-uns un et nous vous engageons à en chercher d'autres afin que le calcul ne soit plus un problème en soi.

Exercice 1

Soit x et y deux réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\frac{x+y}{1+xy} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in [0,1] \times [1,+\infty[\cup [1,+\infty[\times [0,1]$$

Solution :

L'expression $$A(x,y) = \frac{x+y}{1+xy}$$

est bien définie pour tout couple de réels positifs ou nuls; de plus le dénominateur est supérieur ou égal à 1 donc strictement positif. Ainsi, déterminer les couples (x, y) pour lesquels $A(x, y)$ est supérieur ou égal à 1 c'est déterminer les couples (x, y) pour lesquels

$$x + y \geq 1 + xy$$

Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$x+y \geq 1+xy \Leftrightarrow x+y-1-xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-xy)+(y-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -x(y-1)+(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)(1-x) \geq 0$$

Les deux facteurs de ce produit sont donc de même signe et par suite, lorsque $y \geq 1$, $x \leq 1$ ou $x \geq 1$, $y \leq 1$ et réciproquement; on a donc:

$$\frac{x+y}{1+xy} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in [0,1] \times [1,+\infty[\cup [1,+\infty[\times [0,1]$$

Exercice 2

Soit x et y deux réels tels que $x \geq 0$ *et* $y \in \left]0,1\right[$ *; montrer que*

$$\left| \ln \frac{x+y}{1+xy} \right| \leq |\ln y|$$

Solution :

Remarquons que cette écriture a un sens:

$$x \geq 0 \text{ et } 0 < y < 1 \Rightarrow x+y > 0 \text{ et } 1+xy \geq 1 > 0$$

Donc

$$\frac{x+y}{1+xy} > 0$$

ce qui justifie l'existence de son logarithme; par ailleurs, *y* étant strictement positif, son logarithme existe.
Pour montrer que $|a| \leq b$, on montre que $-b \leq a \leq b$; appliquons:

$0 < y < 1 \Rightarrow |\ln y| = -\ln y$; on doit donc démontrer que

$$\ln y \leq \ln \frac{x+y}{1+xy} \leq -\ln y$$

On doit donc montrer que:

$$\ln \frac{x+y}{1+xy} - \ln y \geq 0 \quad \text{et} \quad \ln \frac{x+y}{1+xy} + \ln y \leq 0$$

C'est-à-dire:

$$\ln \frac{x+y}{y(1+xy)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \ln \frac{y(x+y)}{1+xy} \leq 0$$

Ou encore:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x+xy^2} \geq 1 \\ \dfrac{y^2+xy}{1+xy} < 1 \end{cases}$$

Or, on a:

$$\frac{x+y}{y(1+xy)} = \frac{x+y}{xy^2+y} \quad \text{et} \quad \frac{y(x+y)}{1+xy} = \frac{y^2+xy}{1+xy}$$

Comme *x* est positif et $y^2 < 1$, on en déduit:

$$\begin{cases} 0 < y \text{ et } xy^2 \leq x \text{ donc } 0 < xy^2 + y \leq x + y \\ 0 < y^2 < 1 \quad\quad \text{donc } 0 < y^2 + xy < 1 + xy \end{cases}$$

On en déduit donc:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x+xy^2} \geq 1 \\ 0 < \dfrac{y^2+xy}{1+xy} < 1 \end{cases}$$

Ce qui achève la démonstration

Exercice 3

Ecrire $f(x) = (1+x)(1+2x)\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$ *sous la forme*

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$$

où a, b, c sont trois constantes qu'on précisera

Solution :

Calculons successivement les coefficients des termes de degré 0, de degré 1 et de degré 2 de *f*.
Pour le degré 0, c'est facile: on multiplie les termes de degré 0 entre eux et on obtient 1.
Pour obtenir, dans le développement, un terme degré 1, il faut multiplier 3 termes de degré 0 par 1 terme de degré 1; le terme de degré 1 est alors la somme de ces termes; on peut présenter le calcul sous forme d'un tableau:

$1+x$	$1+2x$	$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o(x^2)$	$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$	$\prod$
1	1	1	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{3}$
1	1	$-\frac{x}{2}$	1	$-\frac{x}{2}$
1	$2x$	1	1	$2x$
x	1	1	1	x

Le terme du premier degré est:

$$\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+2x+x=\frac{2-3+12+6}{6}x=\frac{17}{6}x$$

Pour obtenir, dans le développement, un terme degré 2, il faut multiplier 3 termes de degré 0 par 1 terme de degré 2 ou 2 termes de degré 0 par deux termes de degré 1; le terme de degré 2 est alors la somme de ces termes; on peut présenter le calcul sous forme d'un tableau:

$1+x$	$1+2x$	$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o(x^2)$	$1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$	$\prod$
1	1	1	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$
1	1	$-\frac{x^2}{3}$	1	$-\frac{x^2}{3}$
1	1	$-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{3}$	$-\frac{x^2}{6}$
1	$2x$	1	$\frac{x}{3}$	$\frac{2x^2}{3}$
x	1	1	$\frac{x}{3}$	$\frac{x^2}{3}$
1	$2x$	$-\frac{x}{2}$	1	$-x^2$
x	1	$-\frac{x}{2}$	1	$-\frac{x^2}{2}$
x	$2x$	1	1	$2x^2$

Le terme du second degré est:

$$\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{6}\right)+\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{x^2}{3}\right)-x^2-\frac{x^2}{2}+2x^2=-x^2+x^2-x^2+2x^2-\frac{x^2}{2}$$

$$-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{6}+\frac{2x^2}{3}+\frac{x^2}{3}-x^2-\frac{x^2}{2}+2x^2=\frac{x^2}{2}$$

Il s'ensuit:

$$f(x)=1+\frac{17}{6}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes:

a) $2\ln x = \ln(2+x)$

b) $(\ln x)^2 = 2+\ln(x)$

Solution :

a) Un calcul rapide et sans précaution conduit le candidat pressé à écrire:

$$\ln x^2 = \ln(2+x) \text{ donc } x^2 = 2+x \text{ donc } x^2-x-2=0$$

et par suite $x = -1$ et $x = 2$ sont les solutions de l'équation. Sans doute le plus grand nombre d'entre vous ont repéré la faille de cet exposé, qui conduit à un mauvais ensemble de solutions: Il convient d'abord de préciser l'ensemble de définition de l'équation, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'écriture donnée à un sens.

L'ensemble de définition E de l'équation $2\ln x = \ln(2+x)$ est l'ensemble des réels tels que

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2 + x > 0 \iff x > -2 \end{cases}$$

On a donc $E =]0, +\infty[$

Sur cet ensemble, on peut écrire

$$\ln x^2 = \ln(2+x)$$

et donc:

$$x^2 = 2 + x$$

En transposant dans le premier membre,

$$x^2 - x - 2 = 0$$

On a une racine évidente $x = -1$ et comme le produit des racines est égal à -2, on en déduit que la seconde racine est 2.

Compte tenu de l'ensemble de définition, seule la racine égale à 2 est solution de l'équation proposée.

b) L'ensemble de définition E de l'équation $(\ln x)^2 = 2 + \ln(x)$ est l'ensemble des réels strictement positifs. On a donc $E =]0, +\infty[$

En transposant dans le premier membre, on a l'équation:

$$(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$$

On pose $X = \ln x$; on obtient alors une équation du second degré

$$X^2 - X - 2 = 0$$

qui a été résolue ci-dessus; pour $X = -1$, on a $x = e$; pour $X = 2$, on a $x = e^2$. Après avoir vérifié que ce deux nombres sont bien dans E, on en déduit que les solutions de l'équation sont, ici, e et e^2.

Somme et produit de deux nombres

Un certain nombre de système d'équations se ramène au système de base suivant: $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$

Compte tenu de la symétrie d'écriture dans le système, s'il admet une solution (a, b) alors il en admet une autre (b, a). On montre que ce système admet une solution si, et seulement si,

$$S^2 - 4V \geq 0$$

et que dans ce cas, les nombres a et b sont les racines de l'équation

$$U^2 - SU + V = 0$$

Exercice 5

Résoudre le système d'équations suivants:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = -1 \end{cases}$$

Solution :

Si ce système admet une solution (a, b) alors il en admet une autre (b, a). Par ailleurs, les deux nombres a et b sont racines de l'équation

$$X^2 - 7X - 1 = 0$$

On calcule le discriminant de cette équation:

$$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(-1) = 53$$

On en déduit que cette équation admet deux solutions

$$\left(\frac{7-\sqrt{53}}{2}, \frac{7+\sqrt{53}}{2}\right), \left(\frac{7+\sqrt{53}}{2}, \frac{7-\sqrt{53}}{2}\right)$$

Exercice 6

Résoudre le système d'équations suivants:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Solution :

On se ramène à un système d'équations connu: somme et produit de deux nombres

$$\begin{cases} x^2 + (-y^2) = 3 \\ x^2(-y^2) = -(xy)^2 = -4 \end{cases}$$

En posant $u = x^2$ et $v = -y^2$ on obtient le système

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ uv = -4 \end{cases}$$

Si ce système admet une solution (a, b), alors a et b sont racines de l'équation du second degré

$$X^2 - 3X - 4 = 0$$

Ce système admet une racine évidente $x = -1$; le produit des racines étant égal à -4, on en déduit que l'autre racine est 4.

Ainsi on a

$$\begin{cases} u = -1 \\ v = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u = 4 \\ v = -1 \end{cases}$$

ce qui nous conduit à

$$\begin{cases} x^2 = -1 \\ -y^2 = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = 4 \\ -y^2 = -1 \end{cases}$$

Seul, le second système admet des solutions; on trouve immédiatement comme couple solution

$$(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)$$

Enfin l'équation $xy = -2$, montre que x et y sont de signes contraires; les solutions du système sont donc $(2,-1)$ et $(-2,1)$

Exercice 7

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système d'équations suivant admet 2 solutions réelles

$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ xy=1 \end{cases}$$

Solution :

On peut se ramener au système d'équations: somme et produit de deux nombres comme dans l'exercice précédent; toutefois, on peut aussi remarquer qu'en additionnant/soustrayant la première à deux fois la deuxième, on obtient des identités remarquables:

$$\begin{cases} (x+y)^2=a+2 \\ (x-y)^2=a-2 \end{cases}$$

Pour que le système donné ait des solutions, il faut que $a+2$ et $a-2$ soient positifs, c'est-à-dire $a \geq 2$; sous cette contrainte, les solutions possibles du système sont données par:

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{a+2} \\ x-y=\sqrt{a-2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2} \\ x-y=\sqrt{a-2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=\sqrt{a+2} \\ x-y=-\sqrt{a-2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=-\sqrt{a+2} \\ x-y=-\sqrt{a-2} \end{cases}$$

Par suite, en additionnant et en soustrayant ces deux égalités puis en divisant par 2,

$$x=\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{2}, \quad y=\frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{2} \qquad (1)$$

$$x=\frac{\sqrt{a-2}-\sqrt{a+2}}{2}, \quad y=\frac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2}}{2} \qquad (2)$$

$$x=\frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{2}, \quad y=\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{2} \qquad (3)$$

$$x=-\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{2}, \quad y=-\frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{2} \qquad (4)$$

On remplace ces solutions possibles dans le système donné; on remarquera que l'expression x^2+y^2 et xy sont des expressions de la forme $(u+v)^2+(u-v)^2=2(u^2+v^2)$ et $(u+v)(u-v)=u^2-v^2$; on obtient alors:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2\left(\frac{a+2}{4}+\frac{a-2}{4}\right)=a \\ xy=\frac{(a+2)-(a-2)}{4}=1 \end{cases} \qquad (1) \text{ et } (4)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2\left(\frac{a+2}{4}+\frac{a-2}{4}\right)=a \\ xy=\frac{(a-2)-(a+2)}{4}=-1 \end{cases} \qquad (2) \text{ et } (3)$$

Il en résulte donc que

1) les solutions du système d'équations donné, sont, pour $a \geq 2$,

$$\left(\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{2}, \frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{2}\right) \text{ et}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{2}, -\frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{2}\right)$$

2) le système d'équations donné n'a pas de solutions pour $a < 2$.

Exercice 8

Déterminer suivant les valeurs u réel a les racines de l'équation

$$-ax^2+(2a-1)x+2=0$$

Solution :

L'équation donnée est du second degré si $a \neq 0$; dans ce cas,

$$\Delta=(2a-1)^2-4(-a)(2)$$

L'œil avisé de l'étudiant rodé à toutes les ficelles du calcul algébrique de base, remarquera que l'expression peut aussi s'écrire:

$$\Delta=(2a-1)^2+4(2a)(1)$$

et reconnaîtra là, une identité "remarquable": $(u-v)^2+4uv=(u+v)^2$.

$$\Delta=(2a+1)^2$$

Bien sûr, le développement de Δ conduit à la même expression; ce qu'on peut reprocher au candidat, c'est de ne pas s'apercevoir que $4a^2+4a+1$ est aussi égal à $(2a+1)^2$.

Le discriminant est toujours positif ou nul; on en déduit donc, que pour $a \neq 0$, l'équation proposée admet deux racines

$$x_1=\frac{-(2a-1)-(2a+1)}{-2a}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(2a-1)+(2a+1)}{-2a}=-\frac{1}{a}$$

Dans le cas où $a = 0$, l'équation s'écrit:

$$-x+2=0$$

On en déduit immédiatement que cette équation admet une racine égale à 2.

Troisième partie
Fonctions trigonométriques

Dans les limites qui suivent, on doit se rappeler que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin 2x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{\sin^2 3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

Solution :

1) On a $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$; donc $\frac{\sin 2x}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$ et par suite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2$

2) On a $\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et $\sin 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$; donc $\frac{\sin^2 x}{\sin 2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$ et par suite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin 2x} = 0$

3) On a $\sin^3 2x \underset{x\to 0}{\sim} (2x)^3$ et $\sin^2 3x \underset{x\to 0}{\sim} (3x)^2$; donc $\frac{\sin^3 2x}{\sin^2 3x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(2x)^3}{(3x)^2} = \frac{8x^3}{9x^2} = \frac{8}{9}x$ et par suite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{\sin^2 3x} = 0$

4) On a $\ln\cos x = \ln\left[1-(1-\cos x)\right] \underset{x\to 0}{\sim} -(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$; donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$

Pour l'exercice suivant, on rappelle que pour tout réel x, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions définies par

1) $f(x) = \frac{1}{2}(\tan x)(\sin 2x)$

2) $f(x) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

Solution :

1) La fonction f est définie et dérivable sur $E = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$; on a, pour tout x élément de E,

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}(2\sin x\cos x) = \sin^2 x$$

de dérivée définie par:

$$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

2) La fonction f est définie et dérivable pour tout réel x, de dérivée définie par:

$$f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x = x^2\cos x$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{1}{2}x\, dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 3x\, dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx$

5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos x}$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}\, dx$

Solution :

Les trois premières intégrales sont des formules; les intégrations sont immédiates. Pour le calcul de la 4), il convient de se rappeler la dérivée de la fonction tan; la cinquième est plus subtile: on peut d'abord multiplier les deux termes de la fraction par $1-\cos x$ *et après avoir vérifier que la dérivée de la fonction* $x \mapsto 1/\tan x$ *est la fonction* $x \mapsto -1/\sin^2 x$ *on peut conclure. Pour la 6), penser que* $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ *. Pour la 7) il faut savoir que* $\cos 2a = 1-2\sin^2 a$

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{1}{2}x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x\, dx = 2\left[-\cos\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[-\cos\frac{\pi}{4}+\cos 0\right] = -\sqrt{2}+2$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 3x\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos 3x\,dx = \frac{2}{3}\left[\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left[\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0\right] = -\frac{2}{3}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}dx = \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

On en déduit:

6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos x} = -\left[\frac{1}{\tan x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - \sqrt{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\left(1-\sin^2 x\right)}{1-\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\left(1+\sin x\right)dx$

On factorise $1-\sin^2 x = (1-\sin x)(1+\cos x)$ et on simplifie

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\left(1-\sin^2 x\right)}{1-\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\left(1+\sin x\right)dx$

On obtient une forme remarquable $u'u$; on peut donc en déduire:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \left[\frac{(1+\sin x)^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) - 1\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}$$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx$

Pour tout réel x compris entre 0 et $\pi/2$, $\sin x/2 \geq 0$ et donc $\left|\sin x/2\right| \geq \sin x/2$. On a donc:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}dx = -2\sqrt{2}\left[\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 2\sqrt{2} - 2$$

Exercice 4

On rappelle que

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u}$$

(Nous encourageons tous les étudiants à retrouver ce résultat et plus particulièrement ceux qui ne souviennent pas l'avoir déjà fait).

Calculer

1) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

2) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$

3) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$

On utilisera les changements de variables suivants:

pour $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ *, on pose* $x = \frac{a}{b}\tan t$

pour $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ *, on pose* $x = \frac{a}{b}\sin t$

pour $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ *, on pose* $x = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos t}$

Solution :

1) On pose $x = 2\tan t$; soit φ la fonction définie par $x = \varphi(t) = 2\tan t$;

pour $x = 2$ on a $2\tan t = 2$ et donc $t = \frac{\pi}{4}$

pour $x = 2\sqrt{3}$ on a $2\tan t = 2\sqrt{3}$ et donc $t = \frac{\pi}{3}$

La fonction φ est C^1 sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ à valeurs dans $\left[2, 2\sqrt{3}\right]$. Par ailleurs:

$$dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt \qquad 4+x^2 = 4\left(1+\tan^2 t\right) = \frac{4}{\cos^2 t}$$

Donc:

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{4\cos^2 t} \times \frac{|\cos t|}{2\tan^2 t}dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{|\cos t|}{\cos^2 t} \times \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt$$

Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ la fonction cosinus est positive et donc

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\sin t}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

2) On pose $x = \frac{2}{\cos t}$; soit φ la fonction définie par $x = \varphi(t) = \frac{2}{\cos t}$;

pour $x = 2$ on a $\frac{2}{\cos t} = 2$ et donc $t = 0$

pour $x=4$ on a $\dfrac{2}{\cos t}=4$ et donc $t=\dfrac{\pi}{3}$

La fonction φ est C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ à valeurs dans $[2,4]$.

Par ailleurs:

$$dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt \qquad x^2-4=4\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}=\frac{4\sin^2 t}{\cos^2 t}$$

Donc:

$$\int_2^4\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|\frac{\cos t}{2\sin t}\right|\times\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$$

Sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ les fonctions cosinus et sinus sont positives et donc

$$\int_2^4\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{du}{1-u^2}$$

On obtient cette dernière intégrale en effectuant le changement de variable $u=\sin t$

En remarquant que

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{\frac12}{1-u}+\frac{\frac12}{1+u}$$

On en déduit que

$$\int_2^4\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx=\frac12\Big[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\Big]_0^{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac12\ln\frac{1+\frac{\sqrt3}{2}}{1-\frac{\sqrt3}{2}}=\frac12\ln\frac{2+\sqrt3}{2-\sqrt3}$$

Enfin, on peut remarquer que

$$\frac{2+\sqrt3}{2-\sqrt3}=\frac{\left(2+\sqrt3\right)^2}{4-3}=\left(2+\sqrt3\right)^2 \quad\text{donc}\quad \int_2^4\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx=\ln\left(2+\sqrt3\right)$$

3) On pose $x=\dfrac32\sin t$; soit φ la fonction définie par $x=\varphi(t)=\dfrac32\sin t$;

pour $x=\dfrac34$ on a $\dfrac32\sin t=\dfrac34$ et donc $t=\dfrac{\pi}{6}$

pour $x=\dfrac32$ on a $\dfrac32\sin t=\dfrac32$ et donc $t=\dfrac{\pi}{2}$

La fonction φ est C^1 sur $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $\left[\dfrac34,\dfrac32\right]$. Par ailleurs:

$$dx=\frac32\cos t\,dt \qquad 9-4x^2=9\left(1-\sin^2 t\right)=9\cos^2 t$$

Donc:

$$\int_{\frac34}^{\frac32}\frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\frac{3|\cos t|}{3\sin t}\frac32\cos t\,dt$$

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction cosinus est positive et

donc $\displaystyle\int_{\frac34}^{\frac32}\frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx=3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}dt-3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

La deuxième intégrale est une intégrale connue; pour la première, on multiplie le numérateur et le dénominateur par sin t:

$$\int_{\frac34}^{\frac32}\frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx=3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1-\cos^2 t}dt-3\left[-\cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=3\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{du}{1-u^2}-3\left[\cos\frac{\pi}{6}-0\right]$$

En remarquant que

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{\frac12}{1-u}+\frac{\frac12}{1+u}$$

On en déduit que:

$$\int_{\frac34}^{\frac32}\frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx=\frac32\Big[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\Big]_0^{\frac{\sqrt3}{2}}-3\frac{\sqrt3}{2}=\frac32\ln\frac{2+\sqrt3}{2-\sqrt3}-\frac32\sqrt3$$

Enfin, on peut remarquer que

$$\frac{2+\sqrt3}{2-\sqrt3}=\frac{\left(2+\sqrt3\right)^2}{4-3}=\left(2+\sqrt3\right)^2 \quad\text{donc}\quad \int_{\frac34}^{\frac32}\frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx=3\ln\left(2+\sqrt3\right)-\frac32\sqrt3$$

Quatrième partie
■ Intégration des fonctions de la forme $f(x) = (a_n x^n + \ldots + a_0)\, e^{bx}$ ■

On se propose de calculer

$$I=\int_0^1\left(t^4-4t^3+3t^2-2t+1\right)e^{-t}dt$$

de deux façons différentes: intégrations par parties successives et suites.

Pour les intégrations par parties successives, nous proposons ce qui suit:
Si u et v sont des fonctions de classes C^5 sur l'intervalle [0, 1], on a:

$$\int_0^1 u^{(4)}(t)v(t)\,dt=\left[u^{(3)}(t)v(t)-u^{(2)}(t)v'(t)+u'(t)v^{(2)}(t)-u(t)v^{(3)}(t)\right]_0^1+\int_0^1 u(t)v^{(4)}(t)\,dt$$

On peut présenter le calcul des primitives des fonctions u et v sous la forme du tableau suivant:

k	0	1	2	3	4
$u^{(n-k)}$	$u^{(4)}$	$u^{(3)}$	u''	u'	u
$v^{(k)}$	v	v'	v''	$v^{(3)}$	$v^{(4)}$
$(-1)^k$	1	-1	1	-1	1

Le membre de gauche de l'égalité est l'intégrale du produit des éléments de la première colonne du tableau (sous $k = 0$); l'intégrale du second membre est l'intégrale du produit des éléments de la dernière colonne du tableau (sous $k = 4$), le $i^{ème}$ élément du crochet est la fonction obtenue en effectuant le produit comme ci-dessous:

k	0		i	4
$u^{(n-k)}$			$u^{(n-i)}$	
$v^{(k)}$		$v^{(i-1)}$		
$(-1)^k$		$(-1)^{i-1}$		

Laissons le soin au lecteur de généraliser cette méthode à un nombre quelconque d'intégrations par parties successives et faisons l'application dans l'exercice suivant

Exercice 1

A l'aide d'intégrations par parties successives, calculer

$$I = \int_0^1 \left(t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1\right) e^{-t} dt$$

Solution :

Appliquons ce qui vient d'être fait: on désigne par u la fonction exponentielle et par v la fonction polynôme. Dans le tableau ci-dessous, nous remplaçons les fonctions par leurs expressions pour une valeur donnée de t.

k	0	1	2	3	4
$u^{(n-k)}$	e^{-t}	$-e^{-t}$	e^{-t}	$-e^{-t}$	e^{-t}
$v^{(k)}$	$t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1$	$4t^3 - 12t^2 + 6t - 2$	$12t^2 - 24t + 6$	$24t - 24$	24
$(-1)^k$	1	-1	1	-1	1

On obtient

donc: $$I = \left[\begin{array}{l} -e^{-t}\left(t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1\right) + (-1)e^{-t}\left(4t^3 - 12t^2 + 6t - 2\right) \\ \qquad -e^{-t}\left(12t^2 - 24t + 6\right) + (-1)e^{-t}\left(24t - 24\right) \end{array} \right]_0^1 + \int_0^1 24e^{-t} dt$$

On effectue les calculs: $I = \left[e^{-1} + 4e^{-1} + 6e^{-1}\right] - \left[-e^0 + 2e^0 - 6e^0 + 24e^0\right] + 24\left[-e^{-t}\right]_0^1$

$I = 11e^{-1} - 19 + 24\left(-e^{-1} + 1\right)$ Finalement: $\boxed{I = -13e^{-1} + 5}$

Exercice 2

Calcul de $I = \int_0^1 \left(t^4 - 4t^3 + 3t^2 - 2t + 1\right) e^{-t} dt$ *à l'aide de suites:*

Soit k un entier naturel; calculer

$$I_k = \int_0^1 t^k e^{-t} dt$$

pour $k = 0$, puis donner une relation de récurrence entre I_k et I_{k-1} pour tout k supérieur ou égal à 1. En déduire I_k en fonction de k pour k compris entre 1 et 4.
Déterminer la valeur de I.

Solution :

On remarque que l'intégrale I est une somme algébrique de produits d'intégrales de la forme

$$I_k = \int_0^1 t^k e^{-t} dt$$

par des constantes (on dit aussi que I est une combinaison linéaire des intégrales I_k), pour des valeurs entières et positives de k:

$$I = I_4 - 4I_3 + 3I_2 - 2I_1 + I_0$$

On détermine alors I_0 et une relation entre I_k et I_{k-1} pour k supérieur ou égal à 1.

$$I_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$$

et à l'aide d'une intégration par parties

$$I_k = \left[-t^k e^{-t}\right]_0^1 + k\int_0^1 t^{k-1} e^{-t} dt$$

$$I_k = kI_{k-1} - e^{-1}$$

Pour les valeurs de k variant de 1 à 4, on obtient:

k	1	2	3	4
$I_k = kI_{k-1} - e^{-1}$	$\left(1 - e^{-1}\right) - e^{-1}$	$2\left(1 - 2e^{-1}\right) - e^{-1}$	$3\left(2 - 5e^{-1}\right) - e^{-1}$	$4\left(6 - 16e^{-1}\right) - e^{-1}$

c'est-à-dire:

k	1	2	3	4
I_k	$1 - 2e^{-1}$	$2 - 5e^{-1}$	$6 - 16e^{-1}$	$24 - 65e^{-1}$

De la relation $I = I_4 - 4I_3 + 3I_2 - 2I_1 + I_0$ et des résultats résumés dans le tableau ci-dessus, on déduit:

$$I = \left(24 - 65e^{-1}\right) - 4\left(6 - 16e^{-1}\right) + 3\left(2 - 5e^{-1}\right) - 2\left(1 - 2e^{-1}\right) + \left(1 - e^{-1}\right)$$

Et après réduction:

$$\boxed{I = 5 - 13e^{-1}}$$