Mathématiques voies S et E

Corrigés des épreuves 2002 de mathématiques spécifiques à l'EM Lyon (voie S et voie E)

François Delaplace (voie E), **Pierre Girard** (voie S)
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles).

Voie scientifique

EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = u_1 + \ldots + u_n .$$

PARTIE I : *Étude de la suite* $(a_n)_{n \geqslant 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} .$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ, tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1.a. Établir, pour tout réel x :

$$1 + x \leqslant e^x .$$

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t \qquad \text{et} \qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} ,$$

puis :

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} .$$

2.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x de $[0;1]$:

$$(1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0.$$

b. En utilisant *1.b.* et *2.a.*, montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t} .$$

3.a. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) dt .$$

Justifier l'existence de I_n.

b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k dt = n\big(a_n + \ln(n+1)\big) .$$

b. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) dt .$$

Justifier l'existence de J_n, et montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1) .$$

5. On note :

$$U = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt \qquad \text{et} \qquad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt .$$

a. Justifier l'existence de U et de V.

b. Démontrer :

$$\gamma = U - V .$$

Référence
LA REVUE DES PRÉPAS

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E,\quad \langle u(x)\,,\,x \rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1,\ \mathrm{X},\ \mathrm{X}^2)$ est une base de E.

On considère l'application $\varphi\ :\ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P,Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)\,\mathrm{X}^2 - \big(P(1)+P(-1)\big)\,\mathrm{X}.$$

a. Vérifier : $\quad \forall P \in E,\quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

3. Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2+\mathrm{X})$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}\,u(P_1)$.

a. Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille $(P_1,\ P_2)$ est orthonormale.

b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II. Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

1. Pour tout couple $(x,\ y)$ de E^2, développer $\langle u(x+y)\,,\,x+y \rangle$.

En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x,\ y) \in E^2,\quad \langle u(x)\,,\,y \rangle = -\langle x\,,\,u(y) \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

a. Montrer : $\quad \forall (i,\ j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\quad m_{i,j} = \langle e_i\,,\,u(e_j) \rangle.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie $\quad {}^tM = -M.$

PARTIE III. Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.
On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question *II.1.*

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.
En déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.

4.a. Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\big(x, u(x)\big)$.

b. Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.

c. Montrer que $F^{\perp}$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.

d. On munit $F^{\perp}$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_1$ défini pour tout couple (x,y) d'éléments de $F^{\perp}$ par

$$\langle x\,,\,y \rangle_1 = \langle x\,,\,y \rangle.$$

On définit l'endomorphisme u_1 de $F^{\perp}$ par : $\quad \forall x \in F^{\perp},\quad u_1(x) = u(x).$
Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^{\perp}$ et que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

PARTIE IV. Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ est une base orthonormale de E.
Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.
Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\big(f_1,\ u(f_1)\big)$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^{\perp}$.

3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

Premier problème

Partie I

1°) Soit p un entier naturel non nul ; Pour tout t appartenant à $[p,p+1]$ on a $\frac{1}{p+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{p}$ d'où, par intégration : $\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} dt \le \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \le \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt$, c'est à dire $\frac{1}{p+1} \le \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \le \frac{1}{p}$.

D'où $-\frac{1}{p} \le -\int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \le -\frac{1}{p+1}$ et en ajoutant $\frac{1}{p}$ aux trois membres : $\boxed{0 \le u_p \le \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}$.

2°) Pour tout entier naturel non nul : $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} \ge 0$, donc la suite $(a_n)_{n\ge1}$ est <u>croissante</u>, de plus, en sommant les encadrements du 1°), $0 \le \sum_{p=1}^{n} u_p \le \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$ c'est à dire $0 \le a_n \le 1 - \frac{1}{n+1}$ d'où en particulier : $\boxed{0 \le a_n \le 1}$ (1). La suite $(a_n)_{n\ge1}$ est donc croissante et majorée (par une constante !), elle est donc convergente par théorème et si on note γ sa limite, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1), on a bien $\boxed{0 \le \gamma \le 1}$.

Partie II

1°) a) La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative dans un repère quelconque est au dessus de toutes ses tangentes, en particulier la tangente à l'origine dont l'équation est $y - 1 = e^0(x-1)$ c'est à dire $y = x + 1$. Ceci se traduit algébriquement par : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \le e^x}$.

b) Soit n un entier naturel non nul et $t \in [0,n]$, appliquons le résultat précédent au réel $\frac{t}{n}$, on obtient : $1 + \frac{t}{n} \le e^{\frac{t}{n}}$, mais les deux membres étant positifs, on peut les élever à la puissance n d'où : $\boxed{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \le e^t}$ (2). De même, en appliquant l'inégalité du a) à $-\frac{t}{n}$ on obtient : $1 - \frac{t}{n} \le e^{-\frac{t}{n}}$; cette fois ci encore les deux termes sont positifs car $t \in [0,n]$, donc par élévation à la puissance n, on obtient de même : $\boxed{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t}}$ (3). Multiplions alors les deux membres de (2) par le réel <u>positif</u> $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$, cela donne $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le e^t \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ c'est à dire $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \le e^t \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ d'où l'on déduit que $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ et donc, d'après (3) : $\boxed{\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t}}$.

2°) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de $[0;1]$. Si $n = 1$ l'inéquation demandée est claire et si n est supérieur ou égal à 2 : la fonction $g : x \mapsto (1-x)^n$ est de classe C² sur $[0;1]$ et pour tout x de $[0;1]$, $g'(x) = -n(1-x)^{n-1}$, $g''(x) = +n(n-1)(1-x)^{n-2} \ge 0$ donc g est convexe et dans un repère quelconque l'équation la tangente à l'origine de sa courbe représentative est $y - g(0) = g'(0)(x-0)$ c'est à dire $y = 1 - nx$. La courbe étant au dessus de cette tangente on a donc bien $(1-x)^n \ge 1 - nx$. D'où l'inégalité demandée.

b) Soit n un entier naturel non nul et $t \in [0,n]$, $\boxed{0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n}$ a déjà été prouvé au début de la question 1°) b). D'autre part, d'après le 2°)a) appliqué au réel $x = \frac{t^2}{n^2}$ (qui appartient bien à $[0;1]$), $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \ge 1 - n\frac{t^2}{n^2}$ c'est à dire $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \ge 1 - \frac{t^2}{n}$ d'où $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \ge \left(1-\frac{t^2}{n}\right) e^{-t}$ c'est à dire

$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \geq e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t}$ mais on a vu au 1°)b) que $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}$ donc $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \geq e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t}$ d'où enfin $\boxed{e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}}$.

3°) a) Soit n un entier naturel non nul et $t \in \left]0;n\right]$; la fonction

$$h : t \mapsto \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)$$

est continue sur $\left]0;n\right]$; d'autre part, divisons les trois membres de l'encadrement précédent par t, on obtient : $0 \leq \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) \leq \frac{t}{n} e^{-t}$ d'où l'on déduit par le théorème d'encadrement que $\lim_{t \to 0^+} h(t) = 0$; Ainsi l'intégrale $\int_0^n h(t)dt$ est « faussement impropre », puisque h est prolongeable par continuité par 0 en posant $h(0) = 0$ ce qui prouve son existence.

b) Rappelons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ existe et vaut $\Gamma(2)$ c'est à dire 1. Donc $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n te^{-t}dt = 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\int_0^n te^{-t}dt = 0$. Intégrons l'encadrement obtenu au 2°)b) entre ε et n où ε est un réel strictement compris entre 0 et n : $0 \leq \int_\varepsilon^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)dt \leq \frac{1}{n}\int_\varepsilon^n te^{-t}dt$ D'après 2°)a) on peut passer à la limite lorsque ε tend vers 0, on obtient donc : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}\int_0^n te^{-t}dt$, on peut enfin faire tendre n vers $+\infty$ ce qui donne par le théorème d'encadrement : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

4°) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier k compris entre 0 et n-1, en effectuant le changement de variable $u = 1 - \frac{t}{n}$, on obtient :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k dt = \int_1^0 u^k(-ndu) = n\int_0^1 u^k du = n\left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{n}{k+1}$$ et en sommant :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k dt = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} \overset{p=k+1}{=} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p} \quad (4).$$

D'autre part, pour tout entier naturel p non nul on a : $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1}\frac{1}{t}dt$ donc, en sommant :

nue sur $\left[1;+\infty\right[$ et que $\lim_{t \to +\infty} t^2 \cdot \frac{e^{-t}}{t} = \lim_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$ donc il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall t \geq T,\ 0 \leq t^2 \frac{e^{-t}}{t} \leq 1$ donc $\forall t \geq T,\ 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{t^2}$; or $\int_T^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (intégrale de Riemann avec un coefficient > 2), donc d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_T^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge et puisque $\int_0^T \frac{e^{-t}}{t}dt$ existe par continuité de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ sur $\left[0;T\right]$, on en déduit que <u>V existe.</u>

b) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$J_n - I_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left[\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) - \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\right]dt = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)dt + \int_1^n \frac{1}{t}dt - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^1 \frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)dt + \ln(n) - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt$$

Donc $J_n - I_n - \ln(n) = \int_0^1 \frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)dt - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt$ donc $\underline{\lim_{n \to +\infty}\left(J_n - I_n - \ln(n)\right) = U - V}$ (6)

Mais $J_n - I_n - \ln(n) = \left(J_n - \ln(n+1)\right) + \ln(n+1) - \ln(n) = a_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, et on sait d'après la première partie que $\lim_{n \to +\infty} a_n = \gamma$ donc, puisque $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$, on déduit que $J_n - I_n - \ln(n)$ tend vers γ lorsque $n \to +\infty$, ce qui , d'après la relation (6), prouve enfin que :

$$\boxed{\gamma = U - V}$$

Deuxième problème

Partie I

1°) φ est bien une application de E² vers $\mathbb{R}$ Si P, Q et R sont des éléments de E, et si λ est un réel quelconque :

$$\varphi(\lambda P + Q, R) = (\lambda P + Q)(0)R(0) + (\lambda P + Q)(1)R(1) + (\lambda P + Q)(-1)R(-1)$$
$$= (\lambda P(0) + Q(0))R(0) + (\lambda P(1) + Q(1))R(1) + (\lambda P(-1) + Q(-1))R(-1)$$
$$= \lambda\left(P(0)R(0) + P(1)R(1) + P(-1)R(-1)\right) + Q(0)R(0) + Q(1)R(1) + Q(-1)R(-1)$$
$= \lambda\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$. De plus φ est clairement symétrique, donc elle est bilinéaire et symétrique.

$\varphi(P,P) = \left[P(0)\right]^2 + \left[P(1)\right]^2 + \left[P(-1)\right]^2 \geq 0$ prouve qu'elle est aussi positive et enfin, si on suppose que $\varphi(P,P) = 0$ alors $\left[P(0)\right]^2, \left[P(1)\right]^2, \left[P(-1)\right]^2$ étant positifs et de somme nulle sont tous les trois nuls, ainsi : $P(0)=P(1)=P(-1)=0$ ce qui prouve que le polynôme P a au moins trois racines distinctes, mais puisque son degré est inférieur ou égal à 2, P est le polynôme nul. Nous avons donc prouvé que φ est définie.

Conclusion : <u>φ est un produit scalaire sur E.</u>

2°) On montrerait facilement que l'application u est linéaire et puisque pour tout polynôme P, $u(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, u est un endomorphisme de E.

a) Soit P un élément de E, on peut l'écrire sous la forme $P=aX^2+bX+C$ donc $P'=2aX+b$ et $2P'(0)-P(1)+P(-1)=2b-(a+b+c)+(a-b+c)=0$.

b) On a alors pour tout polynôme P et Q de E :

$$\begin{aligned}\langle u(P),P\rangle &= \varphi(u(P),P)=[u(P)]_{(0)}P(0)+[u(P)]_{(1)}P(1)+[u(P)]_{(-1)}P(-1)\\ &=0.P(0)+(2P'(0)-P(1)-P(-1))P(1)+(2P'(0)+P(1)+P(-1))P(-1)\\ &=\left(2P'(0)P(1)-(P(1))^2-P(-1)P(1)\right)+\left(2P'(0)P(-1)+P(1)P(-1)+(P(-1))^2\right)\\ &=2P'(0)[P(1)+P(-1)]-P(1)[P(1)-P(-1)]-P(-1)[P(1)-P(-1)]\\ &=2P'(0)[P(1)+P(-1)]-[P(1)+P(-1)][P(1)-P(-1)]\end{aligned}$$

, mais d'après ce qui précède, on a aussi $2P'(0)=P(1)-P(-1)$ donc en remplaçant :

$$\langle u(P),Q\rangle=2P'(0)[P(1)+P(-1)]-[P(1)+P(-1)][2P'(0)]=0$$

Ce qui prouve que <u>u est bien un endomorphisme antisymétrique de E.</u>

3°) a) $P_1(0)=0, P_1(1)=1$, $P_1(-1)=0$ et $P'_1(X)=(2X+1)/2$ donc $P'_1(0)=1/2$, d'où $u(P_1)=X^2-X$ et, par linéarité de u :

$u^2(P_1)=u(X^2)-u(X)=\left[2.0.X^2-(1+1)X\right]-\left[2.1.X^2-0.X\right]=-2X^2-2X$ donc

$$\boxed{u^2(P_1)=-4P_1}$$

et puisque P_1 n'est pas nul, on en déduit <u>qu'il est vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre -4.</u>

Notons que, u étant antisymétrique, $\langle u(P_1),P_1\rangle=0$ donc $\langle 2P_2,P_1\rangle=0$ donc $\langle P_2,P_1\rangle=0$ et par conséquent la famille (P_1,P_2) <u>est orthogonale</u>. D'autre part, par un calcul simple, on a

$\|P_1\|^2=\varphi(P_1,P_1)=1$ et puisque $u(P_1)=X^2-X$, on a aussi $P_2=\frac{1}{2}(X^2-X)$ donc

$\|P_2\|^2=\varphi(P_2,P_2)=1$. Cela prouve enfin que la famille (P_1,P_2) <u>est orthonormée</u>

b) P est un élément de $Ker(u)$ si et seulement si le polynôme $2P'(0)X^2-[P(1)+P(-1)]X$ est nul

c'est-à-dire si et seulement $\begin{cases}P'(0)=0\\ P(1)+P(-1)=0\end{cases}$ C'est-à-dire, compte tenue de la relation du 2°)a)

$\begin{cases}P(1)-P(-1)=0\\ P(1)+P(-1)=0\end{cases}$ c'est-à-dire, par addition et soustraction membre à membre : $P(1)=P(-1)=0$, c'est-à-dire enfin, puisque P est de degré au plus égal à 2, que P est de la forme $Cste.(X-1)(X+1)$.

Ainsi $\boxed{Ker(u)=Vect(X^2-1)}$.

c) Remarquons par un rapide calcul que si on note $P_3=X^2-1$ alors

$\varphi(P_1,P_3)=\varphi(P_2,P_3)=0$ et $\varphi(P_3,P_3)=1$ donc la famille (P_1,P_2,P_3) est orthonormée, donc libre, et puisqu'elle est formée de 3 éléments d'un espace vectoriel de dimension 3, (P_1,P_2,P_3) est <u>une base orthonormée de E.</u> On a vu que $u(P_1)=2P_2$, $u(P_2)=u\left(\frac{1}{2}u(P_1)\right)=\frac{1}{2}u^2(P_1)=\frac{1}{2}(-4P_1)=-2P_1$

et $u(P_3)=0$, la matrice de u dans la base (P_1,P_2,P_3) est donc : $\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Partie II

1°) En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, si $(x,y)\in E^2$:

$$\langle u(x+y),x+y\rangle=\langle u(x),x\rangle+\langle u(x),y\rangle+\langle u(y),x\rangle+\langle u(y),y\rangle$$

<u>Supposons que u soit un endomorphisme symétrique</u>, alors, $\forall(x,y)\in E^2$ $\langle u(x+y),x+y\rangle=0$, $\langle u(x),x\rangle=0$ et $\langle u(y),y\rangle=0$ donc d'après ce qui précède, $0=0+\langle u(x),y\rangle+\langle u(y),x\rangle+0$ d'où $\langle u(x),y\rangle=-\langle u(y),x\rangle$.

<u>Réciproquement</u>, supposons que $\forall(x,y)\in E^2$ $\langle u(x),y\rangle=-\langle u(y),x\rangle$, alors en particulier si $y=x$, $\langle u(x),x\rangle=-\langle u(x),x\rangle$ donc $2\langle u(x),x\rangle=0$ et donc : $\langle u(x),x\rangle=0$ ce qui prouve que u est un endomorphisme symétrique.

2°) a) La base étant orthonormée, on sait que la $i^{ième}$ coordonnée d'un vecteur x de E dans cette base est $\langle e_i,x\rangle$ en particulier, la $i^{ième}$ coordonnée de $u(e_j)$ dans cette base est $\langle e_i,u(e_j)\rangle$. On sait aussi que la $j^{ème}$ colonne de M est formée des coordonnées de $u(e_j)$ dans cette base ; la $i^{ème}$ coordonnée de $u(e_j)$ est donc m_{ij} et donc $\boxed{m_{ij}=\langle e_i,u(e_j)\rangle}$. (on pouvait presque dire que cette question était une question de cours à condition d'insister sur le caractère « orthonormée » de la base.

b) <u>Si u est un endomorphisme symétrique</u>, alors pour tout couple (i,j) de $\{1,\cdots,n\}^2$,

$m_{ij}=\langle e_i,u(e_j)\rangle=\langle u(e_j),e_i\rangle=-\langle e_j,u(e_i)\rangle=-m_{ji}$ et donc ${}^tM=-M$.

<u>Réciproquement</u>, supposons que ${}^tM=-M$ alors si x et y sont deux éléments quelconques de E, notons X et Y leurs vecteurs colonnes associés dans la base $\mathcal{B}$, on a alors :

$\langle u(x),y\rangle={}^t(MX)Y={}^tX\,{}^tMY={}^tX(-M)Y=-{}^tX(MY)=-\langle x,u(y)\rangle$. D'où le résultat comte tenu de la question 1°) du II.

1°) Supposons que λ soit une valeur propre de u, notons x un vecteur associé à λ, on a alors :
$0=\langle u(x),x\rangle=\langle \lambda x,x\rangle=\lambda\|x\|^2$ et x n'étant pas nul puisque c'est un vecteur propre, le carré de sa norme n'est pas nul donc $\boxed{\lambda=0}$.

2°) Soit x un élément de Ker(u). Pour tout élément y de Im(u), il existe un vecteur z de E tel que $y=u(z)$, donc, puisque u est antisymétrique, $\langle x,y\rangle=\langle x,u(z)\rangle=-\langle u(x),z\rangle=-\langle 0,z\rangle=0$. On a ainsi prouvé que $\boxed{Ker(u)\subset(\operatorname{Im}u)^{\perp}}$(*) mais par le théorème du rang, on a aussi $\dim(Ker\ u)+\dim(\operatorname{Im}\ u)=\dim E$ et par théorème $\dim(\operatorname{Im}\ u)+\dim(\operatorname{Im}u)^{\perp}=\dim E$ on peut alors retrancher membre à membre ces deux égalités pour obtenir $\boxed{\dim(Ker\ u)=\dim(\operatorname{Im}u)^{\perp}}$, avec l'inclusion (*) cela donne : $\boxed{Ker\ u=(\operatorname{Im}u)^{\perp}}$.
L'orthogonal de $\operatorname{Im}u$ est donc $\operatorname{Ker}u$ et puisque $(\operatorname{Im}u)^{\perp}\oplus\operatorname{Im}\ u=E$ on en déduit finalement que $\boxed{Ker\ u \text{ et } \operatorname{Im}u \text{ sont supplémentaires orthogonaux}}$. Il est clair que $Ker(u)\subset Ker(u^2)$; démontrons l'inclusion inverse. Si x est dans $Ker(u^2)$ alors $u^2(x)=0$ donc $u(x)\in Ker(u)$ et donc $u(x)\in Ker(u)\cap\operatorname{Im}(u)$. Mais puisque $Ker\ u$ et $\operatorname{Im}u$ sont supplémentaires, $Ker(u)\cap\operatorname{Im}(u)=\{\vec{0}\}$ donc $u(x)=0$ d'où enfin $x\in Ker(u)$. Conclusion : $Ker(u^2)\subset Ker(u)$.
Conclusion : $\boxed{Ker(u)=Ker(u^2)}$.

3°) Soient x et y deux vecteurs quelconques de E. Puisque u est antisymétrique, on successivement :
$\langle u^2(x),y\rangle=-\langle u(x),u(y)\rangle=-(-\langle x,u(u(y))\rangle)=+\langle x,u^2(y)\rangle$ et cela prouve que u^2 est un endomorphisme symétrique de E. Soit alors λ une valeur propre non nulle de u^2 et x un vecteur propre associé ; on a $\langle u^2(x),x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\lambda\|x\|^2$ et aussi en utilisant l'antisymétrie de u :
$\langle u^2(x),x\rangle=-\langle u(x),u(x)\rangle=-\|u(x)\|^2$ donc $\lambda\|x\|^2=-\|u(x)\|^2$ et puisque x est non nul (vecteur propre), sa norme est non nulle et $\lambda=\dfrac{-\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}\leq 0$.

4°) a) Si u^2 avait pour seule valeur propre 0, puisqu'il est diagonalisable (car symétrique), sa matrice dans une base de vecteurs propres, serait la matrice nulle, u^2 serait donc l'endomorphisme nul et on aurait, d'après 2°) : $Ker(u)=Ker(u^2)=E$, u serait donc l'endomorphisme nul, ce qui est contraire à l'énoncé. $\boxed{\text{Conclusion : } u^2 \text{ a au moins une valeur propre non nulle}}$.

b) Montrons déjà que F est un plan vectoriel, c'est-à-dire que sa dimension est 2. Pour cela, il suffit de prouver que x et $u(x)$ sont indépendants. Supposons que ce ne soit pas le cas, x étant non nul (vecteur propre de u^2), il existerait un réel k tel que $u(x)=kx$ d'où $u^2(x)=ku(x)=k^2x$ donc $\lambda x=k^2x$ et donc $\lambda=k^2$ ce qui est impossible puisque $\lambda<0$ d'après 3°) et le fait que λ ne soit pas nulle.
Conclusion : x et $u(x)$ sont indépendants et puisqu'il engendrent F, ils en forment une base. Donc $\dim F=2$ et F est bien un plan vectoriel. D'autre part $u(x)\in F$ et $u(u(x))=u^2(x)=\lambda x\in F$ donc F est stable par u.

c) Soit y un élément quelconque de $F^{\perp}$, par antisymétrie de u, $\forall z\in F$, $\langle u(y),z\rangle=-\langle y,u(z)\rangle=0$ car y est dans $F^{\perp}$ et, d'après b), x est dans F, donc $u(y)\in F^{\perp}$. $F^{\perp}$ est donc stable par u.

d) Cette question était destinée aux gourmets !
u_1 est une application linéaire et compte tenu de c) son ensemble image est inclus dans F, donc c'est un endomorphisme de F. La relation définissant l'antisymétrie de u étant aussi valable pour tout z de F, on a donc $\langle u(z),z\rangle=0$ c'est-à-dire : $\langle u_1(z),z\rangle=0$; u_1 est donc un endomorphisme antisymétrique de F. De plus, si on applique le résultat de III-2°), le noyau et l'image de u_1 sont supplémentaires dans l'ensemble de départ de u_1, c'est-à-dire $F^{\perp}$. Donc $F^{\perp}=Ker(u_1)\oplus\operatorname{Im}(u_1)$.
Prouvons maintenant que $\operatorname{Im}u=F\oplus\operatorname{Im}u_1$:

<u>1ère étape</u> : Tout d'abord, $\lambda\neq 0$ et $u^2(x)=\lambda x$ donc $x=u\left(u(\frac{1}{\lambda}x)\right)\in\operatorname{Im}u$ et $u(x)\in\operatorname{Im}u$ donc par définition de F, $F\subset\operatorname{Im}u$, et $\operatorname{Im}u_1\subset\operatorname{Im}u$ donc $\boxed{F+\operatorname{Im}u_1\subset\operatorname{Im}u}$ (1)

<u>2ème étape</u> : Soit y un élément de $\operatorname{Im}u$, on peut écrire y sous la forme $y=u(z)$ où $z\in E$ que l'on décompose sous la forme $z=z_1+z_2$ où $z_1\in F$ et $z_2\in F^{\perp}$ puisque F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E, z_2 lui-même se décomposant en
$z_2=t_1+t_2$ où $t_1\in Ker(u_1)\subset F^{\perp}$ et $t_2\in\operatorname{Im}u_1\subset F^{\perp}$ puisque $F^{\perp}=Ker(u_1)\oplus\operatorname{Im}(u_1)$, donc
$y=u(z_1)+u(z_2)=u(z_1)+u(t_1)+u(t_2)=\underbrace{u(z_1)}_{\in F}+\underbrace{u_1(t_1)}_{=0}+\underbrace{u_1(t_2)}_{\in\operatorname{Im}u_1}\in F+\operatorname{Im}u_1$

On a donc prouvé que $\boxed{\operatorname{Im}u\subset F+\operatorname{Im}u_1}$(2).

<u>3ème étape</u> : On sait que $\operatorname{Im}u_1\subset F^{\perp}$ donc $F\cap\operatorname{Im}u_1\subset F\cap F^{\perp}$ donc $\boxed{F\cap\operatorname{Im}u_1=\{0\}}$(3)

<u>Conclusion</u> : Pouf ! On y est ! On a enfin démontré, d'après (1), (2) et (3) que $\boxed{\operatorname{Im}u=F\oplus\operatorname{Im}u_1}$

5°) … Et si les gourmets en re-veulent, on leur en re-donne !
Définissons la proposition de récurrence par : P_n = « Tout endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension n est de rang pair ».
Si E est de dimension 0, le seul endomorphisme de E est nul (donc antisymétrique) et son rang est 0 qui est bien pair

Si E est de dimension 1, notons $\{e\}$ une base de E. Si u est un endomorphisme symétrique de E, alors $u(e)\in E$ donc $\exists k\in\mathbb{R}/u(e)=ke$ et on a par hypothèse $\langle u(e),e\rangle=0$ donc

$$\langle ke,e\rangle=0 \text{ donc } k\underbrace{\|e\|^2}_{\neq 0}=0 \text{ donc } k=0 \text{ donc } u(e)=0$$

Ce qui prouve que u est l'endomorphisme nul car il s'annule sur une base de E. Son rang est donc nul et est donc bien pair.

Supposons alors les hypothèses $P_0, P_1, ..., P_n$ vraies pour un entier $n\geq 1$ quelconque et fixé ;

Prouvons que P_{n+1} est vraie. Pour cela, considérons un espace vectoriel euclidien E de dimension $n+1$ et u un endomorphisme antisymétrique de E. Si u est l'endomorphisme nul, son cas est réglé car son rang est bien pair ; Sinon, on sait d'après III-4° que u^2 a au moins une valeur propre non nul et que si x désigne un vecteur propre associé à cette valeur propre alors le sous-espace vectoriel $F=vect(x,u(x))$ vérifie : $\mathrm{Im}\,u=F\oplus\mathrm{Im}\,u_1$ où u_1 désigne la restriction de u à $F^{\perp}$. Mais u_1 est un endomorphisme du sous-espace de dimension *(n-2)* $F^{\perp}$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à u_1, on en déduit que le rang de u_1 est pair ; or la dimension de F est 2 donc $rg(u)=\dim(\mathrm{Im}\,u)=\dim(F)+\dim(\mathrm{Im}\,u_1)=2+rg(u_1)$ est pair. Ceci démontre la proposition au rang $n+1$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Partie IV

(cette partie pouvait pratiquement être traitée en sautant les difficultés du III.)

1°) La base B étant orthonormée et la matrice A étant antisymétrique, on peut affirmer d'après II-2°)b) que u est un endomorphisme antisymétrique de E. On a :

$$A.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} \text{ et } A.\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-9\\9\\0\end{pmatrix}=-9.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $u^2(f_1)=-9f_1$ et comme $f_1\neq 0$ on en déduit que f_1 est bien un vecteur propre de u^2.

2°) Les coordonnées de f_1 et de $u(f_1)$ dans la base B sont respectivement $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix}$, donc on peut dire que puisque u est un endomorphisme symétrique, $\langle u(f_1),f_1\rangle=0$ (on peut aussi faire le calcul !), de plus $\|f_1\|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$ et $\|u(f_1)\|=\sqrt{3^2+(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{3}$, une base orthonormale de F est donc $\boxed{\left(k_1=\frac{1}{\sqrt{3}}f_1,\ k_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}u(f_1)\right)}$.

$$u\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in F^{\perp}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle u,f_1\rangle=0\\ \langle u,u(f_1)\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\3x-3y-3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=x+y\\t=x-y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=xe_1+ye_2+(x+y)e_3+(x-y)e_4$$

c'est-à-dire : $u\in F^{\perp}\Leftrightarrow u=x(e_1+e_3+e_4)+y(e_2+e_3-e_4)$; posons $g=e_1+e_3+e_4$ et $h=e_2+e_3-e_4$, on a donc $F^{\perp}=vect(g,h)$. Or $\dim F^{\perp}=4-\dim F=4-2=2$ donc (g,h) est une base de F. Mais $\langle g,h\rangle=1.0+0.1+1.1+1.(-1)=0$, il suffit donc de normer ces deux vecteurs : ils ont tous les deux $\sqrt{3}$ pour norme. D'où une base orthonormale de F :

$$\boxed{\left(k_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_3+e_4)\ ,\ k_4=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_2+e_3-e_4)\right)}.$$

Enfin F et $F^{\perp}$ étant supplémentaires, on réunit les deux bases orthonormées pour obtenir une base orthonormée de E : $\mathsf{B}_0(k_1, k_2, k_3, k_4)$. Calculons alors

$$u(k\ )=\frac{1}{\sqrt{3}}u(f_1)=3k_2,\ u(k_2)=u^2\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}f_1\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}u^2(f_1)=\frac{1}{3\sqrt{3}}(-9f_1)=-3k_1 \text{ et}$$

Par un calcul direct à l'aide de la matrice A, on trouve $u(k_3)=-6k_4$ et $u(k_4)=6k_3$; D'où la matrice de u dans la base B_0 : $\boxed{\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\3&0&0&0\\0&0&0&6\\0&0&-6&0\end{pmatrix}}$.

Voie économique

EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. a. Calculer K^2.

b. En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.

c. Montrer que la matrice K n'admet aucune valeur propre réelle.

2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.

a. Montrer : $M^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$.

b. En déduire que, si $(a,b) \neq (0,0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.

c. *Application :* donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

c. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

d. Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1}.

EXERCICE 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}, \quad \text{où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4. a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right).$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2.$$

6. Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1\,;+\infty[$:

$$t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 3

1. *Étude préliminaire*

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, que la série $\sum_{n\geqslant k} C_n^k x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

a. Vérifier, pour tout réel x de $[0\,;1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

b. Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tel que $k < n$, montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

c. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0\,;1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

d. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;1[,\quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

2. *Étude d'une expérience aléatoire*

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X = k \,/\, N = n)$.

c. Vérifier : $\quad \mathrm{P}(X=0) = \dfrac{4}{9}\,.$

d. En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}(X=k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

e. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.

f. Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\quad \mathrm{P}(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k.$

3. *Étude d'une variable aléatoire à densité*

On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a\,;+\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\frac{4}{9}}.$

a. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y.

b. Déterminer une densité f de Y.

c. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x\ln\frac{4}{9}}$.

d. Montrer que Y admet une espérance $\mathrm{E}(Y)$ et calculer $\mathrm{E}(Y)$.

Exercice 1

1 a Un calcul immédiat nous donne $K^2 = -I$.

b) L'énoncé dit « en déduire » ; on doit utiliser le résultat obtenu et non la méthode de Gauss. On a $K(-K) = (-K)K = I$; donc K est inversible et son inverse est $-K$.

c) Là encore, il est particulièrement maladroit d'utiliser autre chose que ce qui vient d'être trouvé. On reconnaît un polynôme annulateur de la matrice K ; on a $K^2 + I = 0$ donc, si ë est une valeur propre de K alors on en déduit que ë $^2 + 1 = 0$; en effet, soit X un vecteur propre de K associé à la valeur propre ë, alors $KX =$ ë X et $K^2X =$ ë ^2X ; donc

$$(K^2 + I)X = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 X + X = 0$$

c'est à dire

$$\left.\begin{matrix}(\lambda^2+1)X = 0 \\ \text{or } X \neq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Cette équation n'admet aucune racine réelle, donc K n'a pas de valeur propre réelle.

2 a On calcule M^2 ; on a :

$$M^2 = (aI + bK)^2 = a^2 I + 2abK + b^2K^2$$

On a $K^2 = -I$ et $bK = M - aI$; on en déduit :

$$M^2 = a^2 I + 2a(M - aI) - b^2K^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$$

b) Là encore, l'énoncé dit « en déduire » ; ne pas utiliser la méthode de Gauss ; d'ailleurs l'énoncé ne nous demande pas de calculer M^{-1}. $M^2 - 2aM = -(a^2+b^2)I$. Or

$(a,b) \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$ donc

$$\left[-\frac{1}{a^2+b^2}(M - 2aI)\right]M = M\left[-\frac{1}{a^2+b^2}(M - 2aI)\right] = I$$

ce qui prouve que M est inversible et que $M^{-1} = -\dfrac{1}{a^2+b^2}(M - 2aI)$

c) C'est une application ; on exprime cette matrice qu'on baptise M, en fonction de I et de K. Immédiatement on trouve :

$$M = \sqrt{2}I + K$$

On a $a = \sqrt{2}, b = 1$; le couple (a, b) n'est pas nul donc M est inversible et son inverse est :

$$M^{-1} = -\frac{1}{3}\left(M - 2\sqrt{2}I\right)$$

Laissons le soin au lecteur de donner l'expression de M.

3 a Pour montrer qu'une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de montrer que c'est une famille libre, ou encore que la matrice Q de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est inversible. On a :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4 \\ v_3 = e_3 \\ v_4 = f(e_3) = -e_1 + e_2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Permutons la deuxième et la quatrième colonne de Q, c'est à dire, considérons la matrice de la famille (v_1, v_4, v_3, v_2) dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ qui est une matrice triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale ; donc elle est inversible et la famille (v_1, v_4, v_3, v_2) est une famille libre ; il s'ensuit que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est aussi une famille libre et par suite une base de $\mathbb{R}^4$.

b) On a :

$$\begin{cases} f(v_1) = v_2 \\ f(v_2) = f^2(v_1) = -v_1 \\ f(v_3) = v_4 \\ f(v_4) = f^2(v_3) = -v_3 \end{cases} \quad \text{on en déduit} \quad K' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matrice Q est la matrice inversible d'une famille de vecteurs ; c'est donc aussi une matrice de passage, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

d) Le cours nous dit que $K' = P^{-1}K\,P$; on nous demande pas de le vérifier.

Exercice 2

Étude des fonctions polynomiales P_n

1. La fonction P_n est une fonction polynomiale, donc dérivable sur son ensemble d'étude, c'est-à-dire sur $[0, +\infty[$. On a, pour tout réel x appartenant à $[0, +\infty[$,

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} x^k = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$,

$$P_n'(x) = -\frac{1-(-x)^{2n}}{1-(-x)} = -\frac{1-x^{2n}}{1+x} = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

2. Le dénominateur de P_n' est toujours positif, donc son signe est celui du numérateur ; on a les implications :

$$\left.\begin{array}{l} x^{2n}-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \geq 1 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} x^{2n}-1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

On en déduit que P_n est croissante sur [1, +∞[et décroissante sur [0, 1] ; P_n est équivalent à son terme de plus haut degré en +∞, il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$

x	0	1	$+\infty$
$P_n'(x)$	$-$	0	$+$
P_n	0 ↘	$P_n(1)$	↗ $+\infty$

3. P_n est strictement décroissante sur [0, 1] car la dérivée est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur cet intervalle. Il s'ensuit que $P_n(0) > P_n(1)$ et donc $P_n(1) < 0$.

4 a On vérifie …

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2}$$

On a donc :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

b On a une relation de récurrence, on peut donc penser que la méthode à employer est une récurrence.
Pour $n = 1$,

$$P_1(x) = -x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et donc} \quad P_1(2) = -2 + \frac{4}{2} = 0 \geq 0$$

On suppose que pour un n quelconque fixé supérieur ou égal à 1, $P_n(2) \geq 0$, alors

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2(n+1)}\right)$$

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\frac{-(n+1)+(2n+1)}{(2n+1)(n+1)}$$

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$$

On en déduit que pour tout entier nature n non nul, $P_n(2) \geq 0$.

5. P_n est continue et strictement croissante sur [1, 2] car la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur cet intervalle et d'autre part $P_n(1)P_n(2) \leq 0$ et $P_n(1) \neq 0$. Il s'ensuit, qu'il existe un seul réel x_n appartenant à]1, 2] tel que $P_n(x_n) = 0$.

P_n est strictement croissante sur]2, +∞[car la dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur cet intervalle ; donc pour tout x strictement supérieur à 2, $P_n(x) > P_n(2) \geq 0$.

Il en résulte que P_n ne s'annule pas sur]2, +∞[et donc P_n ne s'annule qu'une fois sur [1, +∞[, en un nombre x_n appartenant à]1, 2].

6. Pour avoir une racine à 10^{-3} près de l'équation $P_n(x) = 0$, on utilise la méthode de dichotomie ; sans originalité, aucune, reproduisons le programme qu'on trouve dans tous les bons cours.

```
Program Lyon ;
constd = 1E-03 ;
var          a, b, c :real ;

function P(x :real) :real ;
             begin
             P := -x + x*x/2 – x*x*x/3 + x*x*x*x/4 ;
             end ;


Begin
    a :=1 ; b :=2 ; c :=0 ;
    while((abs(b – a) > d) and (P(c) <> 0)) do
             begin
                    c := (a + b)/2 ;
                    if  P(c) > 0) then b := c else a := c ;
             end ;
    writeln(c) ;
End.
```

Limite de la suite (X_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, $P_n(0) = 0$, donc pour tout x positif,

$$\int_0^x P_n'(t)\,dt = P_n(x) - P_n(0) = P_n(x) \quad \text{et donc} \quad P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$$

2. La relation de Chasles et la définition de x_n permettent d'écrire

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = P_n(x_n) = 0$$

D'où la relation demandée :

$$-\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \iff \int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}dt$$

3. Soit n un entier naturel non nul. Etude de la fonction h définie pour tout réel t supérieur ou égal à 1 :

$$h : t \mapsto t^{2n} - nt^2 + n - 1$$

C'est une fonction polynomiale, donc dérivable sur son ensemble de définition :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad h'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt\left(t^{2n-2}-1\right)$$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel t supérieur ou égal à 1,

$\forall t \in [1, +\infty[, \ h'(t) \geq 0 \Rightarrow h$ croissante sur $[1, +\infty[$ De plus, on a $h(1) = 0$, donc

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad h(t) \geq 0 \iff \forall t \in [1, +\infty[, \ t^{2n} - 1 \geq n\left(t^2-1\right)$$

4. Soit n un entier naturel non nul. Le réel x_n est plus grand que 1, donc, pour tout t appartenant à $[1, x_n]$,

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1} \iff \frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n(t-1)$$

Par intégration :

$$\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \int_1^{x_n} n(t-1)\,dt \quad \text{donc} \quad \int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq n\left[\frac{1}{2}(t-1)^2\right]_1^{x_n} = \frac{n}{2}(x_n-1)^2$$

Démontrons l'encadrement : $0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$

En utilisant la première question et en remarquant que $1 - t^{2n} \quad 1$,

$$\frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leq \int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_0^1\frac{1-t^{2n}}{t+1}dt \leq \int_0^1\frac{dt}{1+t} = \ln 2$$

On transpose : $\qquad (x_n-1)^2 \leq \frac{2\ln 2}{n}$

La fonction racine carrée est croissante sur son ensemble de définition et $x_n > 1$ (partie I, question 5), donc

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$$

5. Un célèbre théorème de gendarmerie permet de conclure quant à la convergence et la limite de la suite (x_n) :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}(x_n) = 1$$

Exercice 3

1. Préliminaire

a. Pour tout x appartenant à $[0, 1[$, on a :

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^0 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique puisque $|x| < 1$; on a : $s_0(x) = \frac{1}{1-x}$

Le calcul de $s_1(x)$ revient à montrer que $(1-x)s_1(x) = xs_0(x)$; on a :

$$(1-x)s_1(x) = (1-x)\sum_{n\geq 0} C_n^1 x^n = \sum_{n\geq 0} C_n^1 x^n - \sum_{n\geq 0} C_n^1 x^{n+1}$$

$$(1-x)s_1(x) = \sum_{n\geq 0} nx^n - \sum_{n\geq 0} nx^{n+1} = \sum_{n\geq 1} nx^n - \sum_{n\geq 2}(n-1)x^n$$

La deuxième égalité étant obtenue en remarquant que les sommes commencent à 1 et en effectuant le changement de variable $n' = n + 1$.

$$(1-x)s_1(x) = x + \sum_{n\geq 2}\left[n-(n-1)\right]x^n = \sum_{n\geq 1} x^n = x\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = x\sum_{n\geq 0} x^n$$

La dernière égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $n' = n - 1$. Ainsi, on a bien, $(1-x)s_1(x) = xs_0(x)$ ce qui démontre l'égalité.

b. Tiens, une question de cours ! Rapidement :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right)$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \times \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}$$

c. Pour tout réel x appartenant à $[0, 1[$, on a :

$$s_{k+1}(x) = \sum_{n\geq k+1} C_n^{k+1} x^n = \sum_{n\geq k} C_{n+1}^{k+1} x^{n+1}$$

La dernière égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $n' = n + 1$. On utilise la formule de Pascal ci-dessus et, les séries en présence étant toutes convergentes :

$$s_{k+1}(x) = \sum_{n\geq k} C_{n+1}^{k+1} x^{n+1} = x^{k+1} + x\sum_{n\geq k+1}\left(C_n^k + C_n^{k+1}\right)x^n$$

$$s_{k+1}(x) = x^{k+1} + x\sum_{n\geq k+1} C_n^k x^n + x\sum_{n\geq k+1} C_n^{k+1} x^n$$

On remarque que $x^{k+1} + x\sum_{n\geq k+1} C_n^k x^n = x\left(x^k + \sum_{n\geq k+1} C_n^k x^n\right) = x\sum_{n\geq k} C_n^k x^n$; on en déduit :

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x)$$

d. Pour $k = 0$, on a bien pour tout réel x appartenant à $[0, 1[$,

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{x^0}{(1-x)^{0+1}}$$

On suppose la propriété vérifiée à un rang k quelconque fixé ; pour $k + 1$:

$$0 \le x < 1 \ \text{ et } \ s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x) \Rightarrow (1-x)s_{k+1}(x) = xs_k(x)$$

Et par suite :

$$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} s_k(x) = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$$

Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel k et pour tout réel x appartenant à [0 , 1[, on a :

$$s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Étude d'une expérience aléatoire

a. Clairement, N suit une loi géométrique de paramètre 1/5. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ p(N=k) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

L'énoncé nous dit « donner son espérance » ; il nous demande pas de la calculer. D'après le cours $E(N) = 5$

b. Nous sommes ici dans le modèle théorique d'une loi binomiale : n tirages successifs avec remise, 2 issues possibles ; donc la variable aléatoire $X / N = n$ suit une loi binomiale de paramètres n et 1/5. Pour tout entier naturel k compris entre à et n,

$$p(X = k / N = n) = C_n^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

c. La famille $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$p(X=0) = \sum_{n\ge1} p(X=0/N=n)\,p(N=n)$$

$$p(X=0) = \sum_{n\ge1}\left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\times\frac{5}{4}\sum_{n\ge1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$$

$$p(X=0) = \frac{1}{4}\sum_{n\ge1}\left(\frac{16}{25}\right)^n = \frac{1}{4}\times\frac{16}{25}\times\frac{1}{1-\frac{16}{25}} = \frac{4}{25}\times\frac{25}{9} = \frac{4}{9}$$

On a reconnu la somme d'une série géométrique de raison $q = 16/25$, strictement comprise entre 0 et 1.

d. La famille $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, pour tout entier k strictement positif,

$$p(X=k) = \sum_{n\ge1} p(X=k/N=n)\,p(N=n)$$

On a :

$$p(X=k/N=n) = 0 \ \text{ si } \ n<k$$ Il s'ensuit :

$$p(X=k) = \sum_{n\ge k} p(X=k/N=n)\,p(N=n)$$

$$p(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

En factorisant :

$$p(X=k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k\left(\frac{16}{25}\right)^{n}$$

En utilisant la question 1.d :

$$p(X=k) = \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1-\frac{16}{25}\right)^{k+1}}$$

$$p(X=k) = \frac{1}{4^{k+1}}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k+1}} = \frac{1}{4^{k+1}}\left(\frac{4\times4}{9}\right)^k\frac{25}{9}$$

C'est à dire :

$$p(X=k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

e. La série $\displaystyle\sum_{k\ge1} kp(X=k) = \sum_{k\ge1}\frac{25}{36}k\left(\frac{4}{9}\right)^k$

est convergente car la série $\sum k(4/9)^k$ est convergente d'après l'énoncé, de somme

$$s_1\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9}\times\frac{1}{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{4}{9}\times\frac{81}{25} = \frac{36}{25}$$

Il s'ensuit que $E(X) = 1$.

f. Compte tenu du résultat qu'on doit obtenir, on ne peut résister à l'envie de calculer la probabilité de l'événement contraire. La série

$\displaystyle\sum\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^i$ est convergente (de limite égal à 1), donc pour tout entier naturel k,

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(X=i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^i$$

est convergente de limite $p(X > k)$ et

$$p(X>k) = \frac{25}{36}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1+j} = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^j = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}$$

On obtient donc : $p(X>k)=\dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k\left(\dfrac{4}{9}\right)\dfrac{9}{5}=\dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$

Il en résulte que $p(X\le k)=1-\dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$

Étude d'une variable aléatoire à densité

a. On vérifie la définition.

F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur l'intervalle $\left]-\infty,a\right[$, comme fonction constante, et sur $\left[a,+\infty\right[$, comme fonction de référence ($x\mapsto \alpha e^{\beta x}+\gamma$).

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}F(x)=F(a)=1-\frac{5}{9}e^{-\frac{\ln\frac{9}{5}}{\ln\frac{9}{4}}\ln\frac{4}{9}}=1-\frac{5}{9}e^{-\frac{\ln\frac{9}{5}}{-\ln\frac{4}{9}}\ln\frac{4}{9}}=1-\frac{5}{9}e^{\ln\frac{9}{5}}=0=\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}F(x)$$

Il s'ensuit que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction F est de classe C^1 sur l'intervalle $\left]-\infty,a\right[$, comme fonction constante, et sur $\left[a,+\infty\right[$, comme fonction de référence ($x\mapsto \alpha e^{\beta x}+\gamma$), donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points (le seul point a).

La fonction F est constante donc croissante sur $\left]-\infty,a\right[$; la fonction F est de la forme $x\mapsto \alpha e^{\beta x}+\gamma$ sur $\left[a,+\infty\right[$, avec $\alpha=-5/9$ (négatif) et $\beta=\ln(4/9)$ (négatif) ; donc la fonction F est croissante sur $\left[a,+\infty\right[$ et , compte tenu de la continuité, elle est croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin la limite de F en 0 est 0 et de F en $+\infty$ est 1 car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\frac{4}{9}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x\ln\frac{9}{4}}=0$

b. Par dérivation de F sur chacun des intervalles $\left]-\infty,a\right[$ et $\left]a,+\infty\right[$, on obtient :

$$\begin{cases}F'(x)=0 & \text{si } x<a\\[4pt] F'(x)=\dfrac{5}{9}\ln\dfrac{9}{4}e^{x\ln\frac{4}{9}} & \text{si } x>a\end{cases}$$

Une densité f de Y est par exemple : $\begin{cases}f(x)=0 & \text{si } x<a\\[4pt] f(x)=\dfrac{5}{9}\ln\dfrac{9}{4}e^{x\ln\frac{4}{9}} & \text{si } x\ge a\end{cases}$

c. Une des méthodes du programme pour déterminer une primitive d'une fonction de la forme $x\mapsto(\alpha x+\beta)e^{\gamma x}$ est de dériver cette fonction et de l'identifier à la fonction dont on veut donner *une* primitive :

$$\varphi(x)=(\alpha x+\beta)e^{x\ln\frac{4}{9}}\ \Rightarrow\ \varphi'(x)=\left(\alpha+\beta\ln\frac{4}{9}+\alpha x\ln\frac{4}{9}\right)e^{x\ln\frac{4}{9}}$$

Par identification, on trouve tout de suite $\alpha=\dfrac{1}{\ln\frac{4}{9}},\quad \beta=-\dfrac{1}{\left(\ln\frac{4}{9}\right)^2}$

et une primitive de la fonction g s'écrit : $G(x)=\left(\dfrac{1}{\ln\frac{4}{9}}x-\dfrac{1}{\left(\ln\frac{4}{9}\right)^2}\right)e^{x\ln\frac{4}{9}}$

d. Pour x supérieur ou égal à a, une primitive de $x\mapsto xf(x)$ est la fonction e définie par :

$$e(x)=-\frac{5}{9}\ln\left(\frac{4}{9}\right)\cdot g(x)$$

Après réduction, on obtient :

$$e(x)=\frac{5}{9\ln\frac{9}{4}}\left(x\ln\frac{4}{9}-1\right)e^{x\ln\frac{4}{9}}$$

On a l'implication $\left(u<0\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}ux\,e^{ux}=0\right)$; on en déduit que e a une limite en $+\infty$, donc $E(Y)$ existe et de plus :

$$E(Y)=\int_a^{+\infty}xf(x)\,dx=\lim_{x\to+\infty}e(x)-e(a)=-e(a)$$

Un calcul (presque) immédiat donne

$$E(Y)=\frac{5}{9\ln\frac{4}{9}}\left[-\frac{\ln\frac{9}{5}}{\ln\frac{9}{4}}\ln\frac{4}{9}-1\right]e^{-\frac{\ln\frac{9}{5}}{\ln\frac{9}{4}}\ln\frac{4}{9}}=\frac{5}{9\ln\frac{4}{9}}\left[-\frac{\ln\frac{9}{5}}{-\ln\frac{4}{9}}\ln\frac{4}{9}-1\right]e^{-\frac{\ln\frac{9}{5}}{-\ln\frac{4}{9}}\ln\frac{4}{9}}$$

$$\boxed{E(Y)=\frac{5}{9\ln\frac{4}{9}}\left[\ln\frac{9}{5}-1\right]e^{\ln\frac{9}{5}}=\frac{\ln\frac{9}{5e}}{\ln\frac{4}{9}}}$$

Fin de l'épreuve