Mathématiques
Voie E - Voie S

Sur les parties communes aux voies E et S

Michel Miternique
Professeur agrégé en classes préparatoires économiques et commerciales
lycée Jean-Baptiste Corot (Savigny sur Orge) et IPESUP (Paris),
Auteur de “Musculation en mathématiques (Ellipses) et, avec Jean Mallet, de “Cours et exercices de Mathématiques (Ellipses, 6 tomes) et “E=MC²” (Ellipses, 4 volumes d’exercices).

Il y a trois sortes de classes préparant aux hautes études commerciales : la voie scientifique recrutant des élèves issus des terminales S, la voie économique réservée aux élèves ayant passé un bac ES et la voie technologique dont les candidats proviennent de terminales techniques. Les passés mathématiques de tous ces étudiants sont très différents et ceux de la voie S sont beaucoup mieux armés que les autres.

Les programmes des classes préparatoires citées plus haut ne sont donc pas identiques. Cependant, en fin de 2e année, les connaissances exigées des élèves des voies S et E sont les mêmes sur une grande partie commune aux deux programmes, qui est loin d’être aussi réduite qu’à la sortie de la terminale.

• En probabilités discrètes, les deux programmes sont identiques ;

• En analyse, les deux sections ont à apprendre les théories des séries numériques, des intégrales impropres, des développements limités, les formules de Taylor ;

• Les fonctions de plusieurs variable se limitent à deux variables en voie économique ;

• En probabilité portant sur les variables à densité, la voie S a quelques lois en plus à connaître ;

• En algèbre linéaire, sans les deux cas, on part de la structure d’espace vectoriel (inconnue en terminale S) pour atteindre la théorie de la diagonalisation des matrices carrées. On reste dans le cas réel pour la voie économique. Les scientifiques ont, en plus, un chapitre d’algèbre bilinéaire.

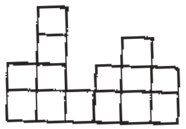
Nous allons présenter quelques exemples d’exercices qui peuvent être proposés aux deux sections.

M. M.

“1e années”

Calculer le nombre de murs rectilignes, d’une brique d’épaisseur, que l’on peut former quand on dispose de n briques cubiques identiques. Un mur est une juxtaposition de colonnes de briques dont les hauteurs ne sont pas nécessairement égales.

Ind : on pourra faire une classification des murs suivant le nombre de colonnes.



$q = 6$ et $n = 14$

Pour construire un mur à q colonnes (avec $1 \leq q \leq n$), plaçons d'abord une ligne de q briques.

Il reste alors $n-q$ briques à répartir dans les q colonnes.

Notons x_i le nombre de briques placées sur la brique n° i, de façon à construire la colonne n° i. $i \in [\![1;q]\!]$ et $x_i \in \mathbb{N}$. Le nombre de murs à q colonnes est égal au nombre de $q$uplets d'entiers naturels $(x_1, \dots, x_q)$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_q = n-q$. Le nombre de solutions à cette équation a été étudié en cours (chap. II, parag. II-4-7)

il vaut $C_{n-q+q-1}^{q-1} = C_{n-1}^{q-1}$.

Le nombre total de murs est donc :

$$\sum_{q=1}^{n} C_{n-1}^{q-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} = \boxed{2^{n-1}}.$$

Deux joueurs de tennis A et B sont à "quarante partout". A gagne le point avec la probabilité $p \in]0,1[$; B gagne le point avec la probabilité $q = 1 - p$.

Quelle est la probabilité que A gagne le jeu (c'est-à-dire marque deux points de plus que B) ?

(On supposera les échanges indépendants les uns des autres).

Désignons par A_n, E_n, G_n les événements :

"A marque le $n^{\text{ième}}$ point", "les joueurs sont à égalité quand l'un d'eux a marqué le $n^{\text{ième}}$ point", "A gagne le jeu en marquant le $n^{\text{ième}}$ point".

$\overline{A_n}$ représente l'événement : "B marque le $n^{\text{ième}}$ point".

Remarques :

1. A ne peut gagner le jeu en marquant le $n^{\text{ième}}$ point que si les joueurs ont marqué, au moins, 2 points (donc n doit être ≥ 2), et s'il y a égalité quand l'un d'eux vient de marquer le $(n-2)^{\text{ième}}$ point. Autrement dit : $G_n = E_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$.

2. E_n ne peut-être réalisé que si n est pair. En particulier, E_0 correspond à l'événement "quarante partout", point de départ des parties qui vont suivre.

Les remarques 1 et 2 permettent de déduire : G_n ne peut être réalisé que si n est pair.

3. L'événement "A gagne le jeu" est $\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_{2k}$

Calculs :

1) De $P(E_{2k})$, $k \in \mathbb{N}$, et de $P(G_{2k})$, $k \in \mathbb{N}^*$:

$P(E_0) = 1$ par hypothèse.

L'événement E_2 est l'union des événements incompatibles $\overline{A_1} \cap A_2$ et $A_1 \cap \overline{A_2}$; donc $P(E_2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) + P(A_1 \cap \overline{A_2}) = 2pq$.

puisque $\overline{A_1}$ et A_2 sont indépendants, ainsi que A_1 et $\overline{A_2}$.

Montrons alors, par récurrence, que $P(E_{2k}) = (2pq)^k$.

Le résultat vient d'être vérifié pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons-le vrai pour un entier $k \geq 1$.

E_{2k+2} est l'union des événements incompatibles $E_{2k} \cap \overline{A_{2k+1}} \cap A_{2k+2}$ et $E_{2k} \cap A_{2k+1} \cap \overline{A_{2k+2}}$. $P(E_{2k+2})$ vaut donc, d'après l'hypothèse de récurrence et l'indépendance des résultats successifs : $(2pq)^k qp + (2pq)^k pq$, soit $(2pq)^{k+1}$, ce qui est le résultat cherché.

On obtient bien : $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ P(E_{2k}) = (2pq)^k}$.

En utilisant la remarque 1, on déduit :

$$\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(G_{2k}) = (2pq)^{k-1} \times p^2}$$

2) Calcul de $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_{2k}\right)$.

a) $p \in]0;1[$, $2pq = 2p(1-p) = 2(p-p^2)$ varie sur $]0;1[$ comme l'indique le tableau ci-contre :

p	0		$\frac{1}{2}$		1
$2pq$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Ce qui prouve que :

$0 < 2pq < 1$, la série de terme général $(2pq)^k$ est donc convergente, et sa somme vaut : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (2pq)^k = \dfrac{1}{1-2pq}$.

b) Les événements G_{2k}, $k \in \mathbb{N}^*$ sont incompatibles deux à deux, donc $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} G_{2k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (2pq)^{k-1} \times p^2 = \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (2pq)^k\right) \cdot p^2$. Alors, d'après a),

$$\boxed{P(A \text{ gagne le jeu}) = \frac{p^2}{1-2pq} = \frac{p^2}{p^2+q^2}}$$

car $p^2+q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 1 - 2pq$.

Remarque : en échangeant p et q, on trouve :

$$P(B \text{ gagne le jeu}) = \frac{q^2}{p^2+q^2}, \text{ et la somme}$$

$P(A \text{ gagne le jeu}) + P(B \text{ gagne le jeu}) = P((A \text{ gagne le jeu}) \cup (B \text{ gagne le jeu}))$ vaut 1, ce qui prouve que la probabilité de l'événement "le jeu ne s'arrête jamais" est nulle.

Deux joueurs A et B disposent d'un dé cubique équilibré et font une partie suivant la règle que voici :

A lance le dé : s'il obtient l'as, il est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête ; s'il obtient 2 ou 3, c'est à B de jouer ; s'il obtient 4, 5 ou 6, la partie est déclarée nulle et le jeu s'arrête.

Lorsque B lance le dé : s'il obtient as, 2 ou 3, il est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête ; s'il obtient 4 ou 5, c'est à A de jouer ; s'il obtient 6, la partie est déclarée nulle et le jeu s'arrête.

Calculer la probabilité des événements suivants :

1) A_{2i+1} : "A est déclaré vainqueur au $(2i+1)^{\text{ème}}$ lancer".
2) G_A : "A est déclaré vainqueur".
3) G_B : "B est déclaré vainqueur".
4) N : "la partie est déclarée nulle".
5) I : "la partie se poursuit indéfiniment".

Désignons par A_{Bk} (resp. B_{Ak}) l'événement : "A passe la main à B (resp. B passe la main à A) au $k^{\text{ième}}$ lancer".

Désignons par E_{Ak} (resp. E_{Bk}) l'événement : "A (resp. B) fait partie nulle au $k^{\text{ième}}$ lancer".

(Notons que les rangs des lancers de A (resp. B) sont forcément impairs (resp. pairs).)

Désignons par A_{G2k+1} (resp B_{G2k}) l'événement : "A gagne la partie, autrement dit, obtient l'as, (resp. B gagne la partie, autrement dit, obtient as, 2 ou 3) au $(2k+1)^{\text{ième}}$ (resp. $2k^{\text{ième}}$) lancer".

Calcul de $P(A_{2i+1})$.

$A_{2i+1} = A_{B1} \cap B_{A2} \cap A_{B3} \cap \cdots \cap B_{A2i} \cap A_{G2i+1}$.

D'après la formule des probabilités composées, (les jets ne sont pas indépendants car si A obtient 1, 4, 5 ou 6 au rang $2k+1$, le jeu s'arrête et le jet n° $2k+2$ n'a pas lieu ; de même si B obtient 1, 2, 3 ou 6 au rang $2k$, le jet n° $2k+1$ n'a pas lieu) :

$$P(A_{2i+1}) = P(A_{B_1}) \times P(B_{A_2}/A_{B_1}) \times \ldots \times P(B_{A_{2i}}/A_{B_1} \cap \ldots \cap A_{B_{2i-1}}) \times P(A_{G_{2i+1}}/A_{B_1} \cap \ldots \cap B_{A_{2i}}).$$

Quand A (resp. B) joue, la probabilité que A passe la main à B (resp. B passe la main à A) vaut $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{3}$). Puis, pour tout k de $\mathbb{N}$, la probabilité que A gagne la partie au rang $2k+1$, quand le jet n° $2k+1$ a lieu, vaut $\frac{1}{6}$. Ainsi, $P(A_{2i+1})$ est le produit de $2i$ probabilités égales à $\frac{1}{3}$ et d'une probabilité égale à $\frac{1}{6}$, donc :

$$\boxed{P(A_{2i+1}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2i} \times \frac{1}{6}}.$$

Calcul de P(A est déclaré gagnant)

L'événement étudié est $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_{2i+1}$, union d'événements incompatibles deux à deux. Sa probabilité vaut :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(A_{2i+1}) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{2i}\right) \times \frac{1}{6} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^{i},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{6} \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} = \boxed{\frac{3}{16}}$$

Calcul de $P(G_B)$.

On raisonne comme pour calculer $P(G_A)$. On écrit : $G_B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_{2i}$ où $B_{2i} = A_{B_1} \cap B_{A2} \cap \dots \cap A_{B2i-1} \cap B_{G2i}$ désigne l'événement : "B est déclaré vainqueur au $2i^{\text{ième}}$ lancer". Pour tout rang k de $\mathbb{N}^*$, la probabilité que B gagne la partie au rang $2k$, quand le lancer n° $2k$ a lieu, vaut $\frac{1}{2}$, alors, $P(B_{2i}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2i-1} \times \frac{1}{2}$ et, $P(G_B) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2i-1}$,

$$\boxed{P(G_B) = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^i = \frac{3}{16}}$$

Calcul de $P(N)$.

Par un raisonnement analogue, on désigne par N_i l'événement : "la partie est déclarée nulle au $i^{\text{ième}}$ lancer" ($i \in \mathbb{N}^*$).

Pour i pair ($i = 2k$), $N_i = A_{B1} \cap B_{A2} \cap \dots \cap A_{B2k-1} \cap E_{B2k}$ a pour probabilité : $\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \times \frac{1}{6}$. Pour i impair ($i = 2k+1$), la probabilité de

$N_i = A_{B1} \cap B_{A2} \cap \dots \cap B_{A2k} \cap E_{A2k+1}$ est $\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \times \frac{1}{2}$.

$N = \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_{2k} \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty} N_{2k+1}$. On déduit alors :

$$P(N) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}$$

$$P(N) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{k}$$

$$P(N) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right) = \boxed{\frac{5}{8}}$$

Calcul de $P(I)$.

Remarquons que $\{G_A, G_B, N, I\}$ est un système complet d'événements. Donc $P(I) = 1 - P(G_A) - P(G_B) - P(N) = 1 - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} - \frac{5}{8}$,

$$\boxed{P(I) = 0}$$

Un sac contient n boules rouges et n boules noires ($n \geq 2$). On répartit au hasard ces boules dans n boîtes, à raison de deux boules par boîte.

1) Calculer la probabilité p_n pour que toutes les boîtes contiennent une rouge et une noire.

2) Calculer la probabilité q_n pour que toutes les boîtes contiennent deux boules de la même couleur.

3) Montrer que $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}$.

4) Calculer $\lim_{+\infty} p_n$ et $\lim_{+\infty} q_n$.

1) Il est plus simple de considérer les boules rouges (resp. noires) discernables entre elles ; on supposera donc que les boules rouges (resp. noires) sont numérotées de 1 à n

L'univers est l'ensemble des n-listes de paires de boules. Ω est muni de l'équiprobabilité. Calculons Card Ω : il y a C_{2n}^2 façons de remplir la $1^{\text{ère}}$ boîte, ensuite, il reste C_{2n-2}^2 façons de remplir la $2^{\text{ième}}$, etc... Le nombre d'éléments de Ω est $C_{2n}^2 \times C_{2n-2}^2 \times \dots \times C_4^2 \times C_2^2$, il vaut :

$$\frac{(2n)!}{(2n-2)!\,2!} \times \frac{(2n-2)!}{(2n-4)!\,2!} \times \dots \times \frac{4!}{2!\,2!} \times \frac{2!}{2!\,0!} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

Il y a $n!$ façons de répartir les n boules rouges (resp. noires) dans les n boîtes, à raison d'une boule par boîte. Il y a donc $(n!)^2$ façons de mettre une boule rouge et une boule noire dans chaque boîte.

$$\boxed{p_n = \frac{(n!)^2\, 2^n}{(2n)!} = \frac{2^n}{C_{2n}^n}}$$

2) Si n est impair.

Il y a n boules rouges et n boules noires, on ne peut pas constituer $\frac{n}{2}$ paires de rouges et $\frac{n}{2}$ paires de noires car $\frac{n}{2}$ n'est pas entier.

$$\boxed{\text{Donc } q_n = 0.}$$

Si n est pair.

Il y a $C_n^{\frac{n}{2}}$ façons de choisir les boîtes recevant les boules rouges ; les noires seront alors réparties dans les $\frac{n}{2}$ boîtes restantes. Une fois ce choix fait, le nombre de répartitions des boules rouges (resp. noires) dans les boîtes qui leur ont été réservées se calcule comme Card Ω ; on trouve donc $\frac{(2\frac{n}{2})!}{2^{\frac{n}{2}}} = \frac{(n!)}{2^{\frac{n}{2}}}$. Le nombre de cas favorables est $C_n^{\frac{n}{2}}\frac{(n!)^2}{2^n}$ et

$$\boxed{q_n = C_n^{\frac{n}{2}}\frac{(n!)^2}{2^n}\times\frac{2^n}{(2n)!} = \frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{C_{2n}^n}.}$$

3) $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots 6.5.4.3.2}{(n(n-1)\dots 3.2)\times(n(n-1)\dots 3.2)}$

Séparons les nombres pairs des impairs au numérateur ;

$$C_{2n}^n = \frac{2n(2n-2)\dots 6.4.2}{n(n-1)\dots 3.2.1}\times\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1}{n.(n-1)\cdots 3.2.1},$$

la première fraction vaut :

$$\frac{2n.2(n-1)\dots(2\times3).(2\times2).(2\times1)}{n.(n-1)\dots 3.2.1} = 2^n,$$

la seconde fraction vaut :

$$\frac{2n-1}{n}\times\frac{2n-3}{n-1}\times\frac{2n-5}{n-2}\times\dots\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{1}, \text{ soit :}$$

$$\frac{2n-1}{n}\times\frac{2(n-1)-1}{n-1}\times\frac{2(n-2)-1}{n-2}\times\dots\times\frac{2\times3-1}{3}\times\frac{2\times2-1}{2}\times\frac{2\times1-1}{1},$$

ce qui donne $\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n-1}\right)\left(2-\frac{1}{n-2}\right)\cdots\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{1}\right)$, chaque terme est majoré par 2, il y a n termes ; la seconde fraction est donc majorée par 2^n et, son produit par $2^n\,(>0)$ est majoré par $(2^n)^2 = 2^{2n}$. Donc :

$$C_{2n}^n \leq 2^{2n}.$$

Écrivons maintenant la seconde fraction :

$$\frac{1}{n}\times\frac{2n-1}{n-1}\times\frac{2n-3}{n-2}\times\dots\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{1} = \frac{1}{n}\times\frac{2(n-1)+1}{n-1}\times\frac{2(n-2)+1}{n-2}\times\dots\times\frac{2\times1+1}{1},$$

c'est-à-dire : $\left(2+\frac{1}{n-1}\right).\left(2+\frac{1}{n-2}\right)\dots\left(2+\frac{1}{1}\right)\times\frac{1}{n}$. Les $n-1$ premiers termes sont minorés par 2, le produit complet est donc minoré par $2^{n-1}\times\frac{1}{n}$. Par suite :

$$2^n\times2^{n-1}\times\frac{1}{n} \leq C_{2n}^n, \text{ autrement dit, } 2^{2n-1}\times\frac{1}{n} \leq C_{2n}^n.$$

Conclusion : $\boxed{\frac{2^{2n-1}}{n} \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}.}$

4) D'après le résultat du 3), tous les termes étant >0,

$$\frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{C_{2n}^n} \leq \frac{n}{2^{2n-1}}, \text{ donc } \frac{2^n}{2^{2n}} \leq \frac{2^n}{C_{2n}^n} \leq \frac{n.2^n}{2^{2n-1}} \text{ car } 2^n>0,$$

autrement dit : $\frac{1}{2^n} \leq p_n \leq \frac{n}{2^{n-1}}$.

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0}$ car les termes extrêmes ont pour limite 0 (théorème des encadrements).

Dans l'inégalité du 3), remplaçons n par $\frac{n}{2}$ (n est pair), on obtient : $\frac{2^{n-1}}{\frac{n}{2}} \leq C_n^{\frac{n}{2}} \leq 2^n$, soit $\frac{2^n}{n} \leq C_n^{\frac{n}{2}} \leq 2^n$.

Multiplions alors, membre à membre, les inégalités entre nombres >0 :

$$\frac{2^n}{n} \leq C_n^{\frac{n}{2}} \leq 2^n \text{ et } \frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{C_{2n}^n} \leq \frac{n}{2^{2n-1}} \text{ ; on obtient}$$

$\frac{1}{n.2^n} \leq q_n \leq \frac{n}{2^{n-1}}$, qui conduit à : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = 0.}$

(théorème des encadrements).

A lance 2 pièces équilibrées, B en lance 3. Celui qui obtient plus de faces que l'autre gagne ; s'il y a égalité, A et B recommencent une autre partie.

1) Quelle est la probabilité pour que A gagne à un lancer ?

2) Quelle est la probabilité pour que B gagne à un lancer ?

3) n est un entier >1;

a) Calculer la probabilité pour que A gagne le jeu, puis celle pour que B gagne le jeu.

b) Quelle est la probabilité pour que ni A, ni B n'aient gagné à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ partie ?

c) Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête jamais ?

A chaque lancer, l'univers de A est l'ensemble Ω_A des couples contenant des p (pour pile) ou des f (pour face), Ω_A est muni de l'équiprobabilité, Card $\Omega_A = 2^2$. L'univers de B est l'ensemble Ω_B des triplets contenant des p ou des f, Ω_B est muni de l'équiprobabilité, Card $\Omega_B = 2^3$.

Les résultats obtenus par A et ceux obtenus par B sont indépendants (on peut considérer que l'on lance 5 fois de suite une même pièce, A s'intéresse aux deux premiers résultats, B aux trois derniers).

Notons x le nombre de "face" obtenu par A, y celui obtenu par B à un lancer.

1) (A gagne) signifie : $(x=1 \cap y=0) \cup (x=2 \cap y=0) \cup (x=2 \cap y=1)$.
Les trois événements de cette réunion sont deux à deux incompatibles, alors, compte tenu de l'indépendance des résultats de A et de B,

$$P(A\text{ gagne}) = P(x=1).P(y=0) + P(x=2)P(y=0) + P(x=2).P(y=1).$$

$(x=1) = \{(f,p);(p,f)\}$; $(x=2) = \{(f,f)\}$.

$(y=0) = \{(p,p,p)\}$; $(y=1) = \{(f,p,p),(p,f,p),(p,p,f)\}$.

Donc, $P(A\text{ gagne}) = \frac{2}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2^3}$;

$$\boxed{P(A\text{ gagne à un lancer}) = \frac{3}{16}}$$

2) On suit le même raisonnement qu'au 1).

$$P(B\text{ gagne}) = P(x=0).P(y=1) + P(x=0).P(y=2) + P(x=0).P(y=3) + P(x=1).P(y=2) + P(x=1).P(y=3) + P(x=2).P(y=3).$$

$(x=0) = \{(p,p)\}$; $(y=3) = \{(f,f,f)\}$;

$(y=2) = \{(p,f,f);(f,p,f);(f,f,p)\}$.

Donc $P(B\text{ gagne}) = \frac{1}{2^2}\times\frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^2}\times\frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^2}\times\frac{3}{2^3} + \frac{2}{2^2}\times\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2^3}$.

$$\boxed{P(B\text{ gagne à un lancer}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}}$$

3)a) Notons N_i : "**la partie** est nulle au $i^{\text{ème}}$ lancer",
A_i : "A gagne la $i^{\text{ème}}$ partie",
B_i : "B gagne la $i^{\text{ème}}$ partie",

$\mathcal{A}_i$: "A gagne le jeu en remportant la $i^{\text{ème}}$ partie", c'est-à-dire $\mathcal{A}_i = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{i-1} \cap A_i$ ($\mathcal{A}_1 = A_1$).

$\mathcal{B}_i$: "B gagne le jeu en remportant la $i^{\text{ème}}$ partie", c'est-à-dire $\mathcal{B}_i = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{i-1} \cap B_i$; ($\mathcal{B}_1 = B_1$).

Si $i > 1$, $P(\mathcal{A}_i) = P(N_1).P(N_2/N_1)\dots P(N_{i-1}/N_1\cap\dots\cap N_{i-2}).P(A_i/N_1\cap\dots\cap N_{i-1})$.

A chaque lancer, la probabilité de faire partie nulle est $P(x=0 \cap y=0) \cup (x=1 \cap y=1) \cup (x=2 \cap y=2))$; en raisonnant comme aux questions 1) et 2), on trouve : $\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^2}\times\frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^2}\times\frac{3}{2^3} = \frac{5}{16}$.

Alors $P(\mathcal{A}_i) = \left(\frac{5}{16}\right)^{i-1}\times\frac{3}{16}$, $P(\mathcal{B}_i) = \left(\frac{5}{16}\right)^{i-1}\times\frac{1}{2}$ (en utilisant les résultats de 1) et 2)) ; ces valeurs s'appliquent au cas $i=1$.

Notons, maintenant, G_A : "A gagne le jeu", G_B : "B gagne le jeu".
G_A est la réunion des événements deux à deux incompatibles : $\bigcup_{i=1}^{+\infty}\mathcal{A}_i$. $P(G_A) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{16}\right)^{i-1}\cdot\frac{3}{16} = \frac{3}{16}\cdot\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{16}\right)^j$,

$$\boxed{P(G_A) = \frac{3}{16}\times\frac{1}{1-\frac{5}{16}} = \frac{3}{11}}$$

De la même façon, $P(G_B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}\mathcal{B}_i\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{16}\right)^{i-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{16}\right)^j$,

$$\boxed{P(G_B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{16}} = \frac{8}{11}}$$

b) L'événement étudié est $N_1 \cap \dots \cap N_n$, sa probabilité vaut

$$P(N_1)\times P(N_2/N_1)\times\dots\times P(N_n/N_1\cap\dots\cap N_{n-1}) = \boxed{\left(\frac{5}{16}\right)^n}.$$

c) L'événement étudié est $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_n$; notons-le N.

Si l'on note $\mathcal{N}_n$ l'événement $N_1\cap\dots\cap N_n$, N apparaît comme $\bigcap_{n=1}^{+\infty}\mathcal{N}_n$, intersection d'une suite décroissante d'événements

(car $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{N}_{n+1}\subset\mathcal{N}_n$). Ainsi $P(N) = \lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{N}_n)$,

d'après b), $\boxed{P(N) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{16}\right)^n = 0.}$

Soit $(A, B, C) \in \mathbb{N}^3$. Une urne contient B boules blanches et R boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet, accompagnée de C boules de la couleur tirée. On recommence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est la VARD qui vaut 0 si au $n^{\text{ème}}$ tirage on a une boule blanche, qui vaut 1 si c'est une boule rouge.

1) Calculer $p(X_1 = 1)$, $p(X_2 = 1)$, $p(X_1 = 1/X_2 = 1)$. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

2) On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Que représente S_n ?

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $p(X_n = 1) = \dfrac{R + C.E(S_{n-1})}{B + R + (n-1)C}$.

($E(S_k)$) est l'espérance de S_k) .

En déduire que les variables X_n suivent toutes la même loi.

1) On suppose les tirages équiprobables. $\boxed{P(X_1 = 1) = \frac{R}{B+R}}$

Utilisons le système complet d'événements $\{(X_1 = 0), (X_1 = 1)\}$ et appliquons la formule des probabilités totales :

$$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1/X_1 = 0).P(X_1 = 0) + P(X_2 = 1/X_1 = 1).P(X_1 = 1).$$

$P(X_1 = 1) = \frac{R}{B+R}$ (v. plus haut), de même, $P(X_1 = 0) = \frac{B}{B+R}$.

$P(X_2 = 1/X_1 = 0) = \frac{R}{B+R+C}$ car, si l'on a tiré une blanche au premier coup, on dispose, avant le deuxième tirage de $B+R+C$ boules dans l'urne dont R rouges.

$P(X_2 = 1/X_1 = 1) = \frac{R+C}{B+R+C}$ car, ici, l'urne contient $R+C$ boules rouges avant d'effectuer le second tirage.

$$P(X_2 = 1) = \frac{R}{B+R+C}\times\frac{B}{B+R} + \frac{R+C}{B+R+C}\times\frac{R}{B+R} = \frac{R(B+R+C)}{(B+R+C).(B+R)}.$$

Finalement, $\boxed{P(X_2 = 1) = \frac{R}{B+R}}$

$$P(X_1 = 1/X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 1\cap X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{P(X_2 = 1/X_1 = 1).P(X_1 = 1)}{P(X_2 = 1)}.$$ Ce qui

donne, d'après ce qui précède : $\boxed{P(X_1 = 1/X_2 = 1) = \frac{R+C}{B+R+C}}$

$P(X_1 = 1\cap X_2 = 1) = P(X_2 = 1/X_1 = 1).P(X_1 = 1) = \frac{R+C}{B+R+C}\times\frac{R}{B+R}$. D'autre part, $P(X_1 = 1)\times P(X_2 = 1) = \left(\frac{R}{B+R}\right)^2$. Donc,

$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes si et seulement si } C = 0.}$

2) $\boxed{S_n \text{ représente le nombre de boules rouges tirées en } n \text{ tirages.}}$

a) Utilisons le système complet d'événements : $\{(S_{n-1} = k)/k\in[\![0;n-1]\!]\}$, et appliquons la formule des probabilités totales :

$$P(X_n = 1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = 1/S_{n-1} = k)\times P(S_{n-1} = k).$$

Si l'on a tiré k boules rouges au cours des $n-1$ premiers tirages, on dispose, avant d'effectuer le $n^{\text{ième}}$ tirage, de $B+R+(n-1)C$ boules dans l'urne, dont $R+k.C$ sont rouges. Ainsi, $P(X_n = 1/S_{n-1} = k) = \frac{R+k.C}{B+R+(n-1).C}$ et

$$P(X_n = 1) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(R+k.C).P(S_{n-1} = k)}{B+R+(n-1)C} = \frac{R\sum_{k=0}^{n-1}P(S_{n-1} = k) + C.\sum_{k=0}^{n-1}k.P(S_{n-1} = k)}{B+R+(n-1)C}$$

Mais $\sum_{k=0}^{n-1}P(S_{n-1} = k) = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1}k\,P(S_{n-1} = k) = E(S_{n-1})$, d'où :

$$\boxed{P(X_n=1) = \frac{R + C.E(S_{n-1})}{B+R+(n-1)C}}$$

b) Les variables X_i ne prenant que les valeurs 0 et 1, il suffit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n=1)=\frac{R}{B+R}$; on aura forcément, $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X_n=0)=1-\frac{R}{B+R}=\frac{B}{B+R}$

Raisonnons par récurrence sur n.

a) $P(X_1=1)=\frac{R}{B+R}$ d'après la première question.

b) Supposons qu'il existe un entier $n-1$ de $\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout i de $[\![1;n-1]\!]$, $P(X_i=1)=\frac{R}{B+R}$. Dans ce cas, $\forall i\in[\![1;n-1]\!]$, $E(X_i)=\frac{R}{B+R}$, et, $E(S_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i)=(n-1)\cdot\frac{R}{B+R}$. Par suite, en utilisant la formule établie plus haut, on trouve : $P(X_n=1)=\dfrac{R+\frac{CR}{B+R}(n-1)}{B+R+(n-1)C}=\dfrac{R(B+R+(n-1)C)}{(B+R)(B+R+(n-1)C)}=\dfrac{R}{B+R}$

c) conclusion : $\boxed{\text{les variables } X_n \text{ ont toutes la même loi.}}$

On considère un polygone de n cotés ($n \geq 3$).

1) Combien a-t-il de diagonales ?

2) Combien faut-il utiliser, au minimum, de sommets comme origines pour construire toutes les diagonales ?

3) On considère, dans la suite de l'exercice, que le nombre de côtés est une VARD N définie par $\forall n \geq 3$, $p(N=n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Montrer qu'on a bien une VARD.

4) Calculer l'espérance $E(N)$.

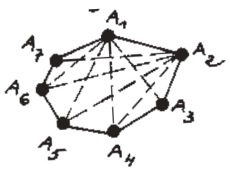
5) Le nombre de diagonales de ce polygone est une VARD N' Calculer l'espérance $E(N')$.

1) Quand on joint deux sommets, on obtient un côté ou une diagonale.

Il y a C_n^2 façons de joindre deux sommets, il y a n côtés, il y a donc $C_n^2-n=\frac{n(n-1)}{2}-n=\boxed{\frac{n(n-3)}{2}\text{ diagonales.}}$

2) Si l'on note $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets ; de A_1, on peut tracer $n-3$ diagonales, de A_2 aussi. De A_3 on en trace $n-4$ nouvelles, etc...

En effet, de A_1, on trace les diagonales $(A_1A_3),\ldots,(A_1A_{n-1})$; de A_2, on trace les diagonales $(A_2A_4),\ldots,(A_2A_n)$, dans les deux cas, il y a $n-3$ diagonales.



A partir de A_3, le nombre de diagonales diminue d'une unité à chaque sommet ; de A_3, on trace $(A_3A_5)\ldots(A_3A_n)$ et on s'arrête car (A_3A_1) est déjà tracé.

On aura tracé toutes les diagonales au sommet $n-2$, car de ce sommet, ne part que la diagonale $(A_{n-2}A_n)$, les autres : $(A_1A_{n-2}),\ldots,(A_{n-4}A_{n-2})$ sont déjà tracées.

$\boxed{\text{Le nombre cherché est } n-2.}$

3) $n\geq 3$. Rappelons que : $\forall x\in]0;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Alors,

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=1.$$

$\boxed{P(N=n)=\frac{1}{2^{n-2}} \text{ définit une loi de probabilité}}$

4) Rappelons que $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ pour tout x de $]0;1[$

Donc $\sum_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=2\sum_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\left(\frac{1}{2}\right)^0-2\left(\frac{1}{2}\right)^1\right)$

$\sum_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-2\right)=4$, (série à termes ≥ 0).

$$\boxed{E(N)=4}$$

5) $N'=\frac{N(N-3)}{2}$ donc $E(N')=\frac{1}{2}E(N^2)-\frac{3}{2}E(N)$.

Rappelons que, pour $x\in]0;1[$, $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$E(N^2)=\sum_{n=3}^{+\infty}n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\sum_{n=3}^{+\infty}\left(n(n-1)+n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\sum_{n=3}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\sum_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,

donc $E(N)^2=\left(\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}-2(1)\left(\frac{1}{2}\right)^0\right)+4=18$, (série à termes ≥ 0).

$E(N')=\frac{1}{2}\times 18-\frac{3}{2}\times 4$; $\boxed{E(N')=3}$

X et Y sont deux VARD de Ω dans $\mathbb{R}$ de même loi, Z une VARD de Ω dans $\mathbb{R}$. $Z \hookrightarrow B(p)$; Z est indépendante de X et Y. On pose $T = XZ + (1-Z)Y$. Déterminer la loi de T.

$Z \in \{0,1\}$, $P(Z=1) = p$ et $P(Z=0) = 1-p = q$.
X et Y ont même loi, elles prennent donc les mêmes valeurs. Si X et Y prennent respectivement les valeurs x et y (y est aussi une des valeurs que prend X), lorsque $Z=1$, T vaut x, lorsque $Z=0$, $T=y$. T prend donc les mêmes valeurs que X.

Soit alors $x \in X(\Omega)$. $\{(Z=0),(Z=1)\}$ étant un système complet d'événements, $P(T=x)$ vaut successivement :

$$P(T=x/Z=0).P(Z=0) + P(T=x/Z=1).P(Z=1),$$

$$q.P(XZ+(1-Z)Y=x/Z=0) + p.P(XZ+(1-Z)Y=x/Z=1),$$

$$q.P(Y=x/Z=0) + p.P(X=x/Z=1),$$

$q.P(Y=x) + p.P(X=x)$ car Z est indépendante de X et de Y,

$q.P(X=x) + p.P(X=x)$ car X et Y ont même loi.

Conclusion : $\forall x \in X(\Omega)$, $P(T=x) = (q+p).P(T=x) = P(T=x)$

$\boxed{T \text{ suit la même loi que } X \text{ et } Y.}$

Un commerçant reçoit dans un carton un lot de N articles dont n sont défectueux $(1 \leq n \leq N)$.

Le commerçant contrôle les articles en les tirant du carton un à un, sans remise.

Soit X (resp Y) la VARD égale au rang du premier (resp deuxième) article défectueux contrôlé.

1) On suppose, dans cette question, que $n = 1$.

Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2) On suppose dans cette question que $n = 2$ et $N = 5$.

a) Déterminer les lois de X et Y.

b) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

c) Calculer la covariance de (X,Y).

3) Pour N et n quelconques, déterminer les lois de probabilité de X et Y.

4) N est quelconque et $n = 2$. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

5) N et n sont quelconques. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

Dans le cas général, l'univers Ω est un ensemble de N-uplets. Si l'on représente les articles défectueux par des boules noires et les autres par des blanches, les N-uplets de Ω contiennent n boules noires et $N-n$ blanches. Ω est muni de l'équiprobabilité, son cardinal est C_N^n.

1- X suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$; pour tout i de $[\![1;N]\!]$,

$P(X=i) = \frac{1}{N}$. Donc $\boxed{E(X) = \frac{N+1}{2}}$ $\left(= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i\right)$.

$$\boxed{V(X) = \frac{N^2-1}{12}} \left(= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i^2 - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{N}.\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4}\right)$$

2- a) $X(\Omega) = [\![1;4]\!]$; $Y(\Omega) = [\![2;5]\!]$.

Soit $i \in [\![1;4]\!]$. Il y a une seule façon de placer une boule noire dans la $i^{\text{ème}}$ case, il y a $5-i$ façons de placer la deuxième boule noire dans l'une des $5-i$ qui suivent la $i^{\text{ème}}$; il y a donc $5-i$ façons de réaliser l'événement $(X=i)$.

$$\boxed{P(X=i) = \frac{5-i}{C_5^2} = \frac{5-i}{10}}$$

Soit $j \in [\![2;5]\!]$. Il y a une seule façon de placer une boule noire dans la $j^{\text{ème}}$ case, il y a $j-1$ façons de placer la deuxième boule noire dans l'une des $j-1$ cases qui précèdent la $j^{\text{ième}}$; il y a donc $j-1$ façons de réaliser l'événement $(Y=j)$.

$$\boxed{P(Y=j)=\frac{j-1}{C_5^2}=\frac{j-1}{10}}.$$

b) Il est évident que la première boule noire est avant la deuxième. Autrement dit, $X<Y$. Pour $i\in[\![1;4]\!]$ et $j\in[\![2;5]\!]$, l'événement $(X=i \text{ et } Y=j)$ ne peut avoir une probabilité non nulle que si $i<j$ et, lorsque $i<j$, il n'y a qu'une seule façon de placer la première boule noire au rang i et la deuxième au rang j. Par conséquent,

pour $1\leq i<j\leq 5$, $\boxed{P(X=i \text{ et } Y=j)=\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10}}$.

c) Rappelons que $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\times E(Y)$.
Récapitulons les lois de X et de Y.

k	1	2	3	4
$10\times P(X=k)$	4	3	2	1

k	2	3	4	5
$10\times P(Y=k)$	1	2	3	4

$E(X)=\frac{1}{10}.(1\times4+2\times3+3\times2+4\times1)$

$\boxed{E(X)=2}$.

$E(Y)=\frac{1}{10}.(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4)$

$\boxed{E(Y)=4}$

Dressons maintenant le tableau :

Y \ X	1	2	3	4
2	2 / $\frac{1}{10}$	4 / 0	6 / 0	8 / 0
3	3 / $\frac{1}{10}$	6 / $\frac{1}{10}$	9 / 0	12 / 0
4	4 / $\frac{1}{10}$	8 / $\frac{1}{10}$	12 / $\frac{1}{10}$	16 / 0
5	5 / $\frac{1}{10}$	10 / $\frac{1}{10}$	15 / $\frac{1}{10}$	20 / $\frac{1}{10}$

Dans le carré figurant à l'intersection de la colonne numéro i ($i\in[\![1;4]\!]$) et de la ligne numéro j ($j\in[\![2;5]\!]$), sont inscrites :

- au dessus de la diagonale, la valeur du produit X.Y (autrement dit $i\times j$)
- au dessous de la diagonale, la probabilité $P(X=i \text{ et } Y=j)$.

Pour chaque valeur p du produit X.Y, la probabilité $P(XY=p)$ vaut $\sum_{i\times j=p} P(X=i \text{ et } Y=j)$ car les événements $(X=i \text{ et } Y=j)$, $i\in[\![1;4]\!]$, $j\in[\![2;5]\!]$ sont incompatibles deux à deux. Pour calculer $P(XY=p)$, il suffit d'ajouter les probabilités figurant dans les carrés en haut desquels est écrite la valeur p ; (exemple : $P(X.Y=12)=P(X=3 \text{ et } Y=4)+P(X=4 \text{ et } Y=3)$, ce qui donne $\frac{1}{10}+0=\frac{1}{10}$).

Remarque : On peut observer ici, que, pour toute valeur p du produit X.Y, l'événement $(XY=p)$ ne correspond qu'à un seul événement de la forme $(X=i \text{ et } Y=j)$, (avec $i\times j=p$), dont la probabilité est non nulle, sauf lorsque $p=9$ ou $p=16$, où l'on a $P(XY=9)=P(XY=16)=0$. Pour toute valeur de p autre que 9 et 16, $P(XY=p)=\frac{1}{10}$. Par suite,

$$E(XY)=\frac{1}{10}(2+3+4+5+6+8+10+12+15+20),$$

$$\boxed{E(XY)=\frac{85}{10}=\frac{17}{2}}.$$

Alors $\boxed{cov(XY)=\frac{17}{2}-2\times4=\frac{1}{2}}$.

3. La plus petite valeur que peut prendre X est 1. X atteint sa plus grande valeur quand les $N-n$ premiers objets ne sont pas défectueux, alors que les n derniers le sont ; dans ce cas, le premier objet défectueux occupe le rang $N-n+1$. Les valeurs prises par X sont donc les entiers de $[\![1;N-n+1]\!]$, et les valeurs prises par Y sont les entiers de $[\![2;N-n+2]\!]$. Pour déterminer les lois de X et Y, réutilisons les boules.

Soit $i\in[\![1;N-n+1]\!]$, il y a une seule façon de placer la première boule noire dans la $i^{\text{ième}}$ case ; il y a C_{N-i}^{n-1} façons de répartir les $n-1$ autres boules noires dans les $N-i$ cases qui suivent la $i^{\text{ième}}$. Donc :

$$\boxed{P(X=i)=\frac{C_{N-i}^{n-1}}{C_N^n}}.$$

Soit $j\in[\![2,N-n+2]\!]$. Après avoir placé la deuxième boule noire dans la $j^{\text{ième}}$ case, il reste $j-1$ façons de placer la première dans l'une des $j-1$ cases qui précèdent, et C_{N-j}^{n-2} façons de placer les $n-2$ autres dans les $N-j$ cases qui suivent. Donc :

$$\boxed{P(Y=j)=\frac{(j-1).C_{N-j}^{n-2}}{C_N^n}}.$$

4. Pour $n=2$; $X(\Omega)=[\![1;N-1]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![2;N]\!]$.
On raisonne exactement comme à la question 2-b). On trouve :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour } i\in[\![1;N-1]\!] \text{ et } j\in[\![2;N]\!],\ P(X=i \text{ et } Y=j)=0 \text{ si } j\leq i,\\ \text{et } P(X=i \text{ et } Y=j)=\dfrac{1}{C_N^2} \text{ si } i<j.\end{array}}$$

5. Soient $i\in[\![1;N-n+1]\!]$ et $j\in[\![2;N-n+2]\!]$.

Si $j\leq i$, $P(X=i \text{ et } Y=j)=0$.

Si $i<j$, il y a une seule façon de placer la première boule noire au rang i et la deuxième au rang j. Il y a C_{N-j}^{n-2} façons de répartir les $n-2$ boules noires qui restent dans les $N-j$ cases qui suivent la $j^{\text{ième}}$. Donc :

$$\boxed{P(X=i \text{ et } Y=j)=\frac{C_{N-j}^{n-2}}{C_N^n}}.$$

$DL_3(0)$: $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{x+1}-2\ln(x+1)$.

Au voisinage de 0, $f(x)=x(2+x)(1+x)^{-1}-2\ln(1+x)$.
x étant en facteur dans le premier terme, on ne prendra le d.l. de $(1+x)^{-1}$ qu'à l'ordre 2. Ainsi,

$$f(x)=(2x+x^2).(1-x+x^2+x^2.\varepsilon_1(x))-2(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3.\varepsilon_2(x)),$$

en ne gardant que les termes de degré, au plus 3, on trouve :

$$f(x)=2x-2x^2+2x^3+x^2-x^3-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+x^3.\varepsilon(x),$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^3.\varepsilon(x).}$$

$$\lim_{x\to0}\varepsilon_1(x)=\lim_{x\to0}\varepsilon_2(x)=\lim_{x\to0}\varepsilon(x)=0.$$

$DL_4(0)$: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

Au voisinage de 0, $f(x)=(x+1)^{-1}.\ln(1+x)$,

$$f(x)=(1+x)^{-1}.(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^4.\varepsilon_1(x)),$$

on peut mettre x en facteur dans le d.l. de $\ln(1+x)$, on ne prendra donc le d.l. de $(1+x)^{-1}$ qu'à l'ordre 3.

$$f(x)=(1-x+x^2-x^3+x^3.\varepsilon_2(x)).(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^4.\varepsilon_1(x)).$$

On ne garde que les termes de degré ≤ 4, alors,

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}+x^3-\frac{x^4}{2}-x^4+x^4.\varepsilon(x),$$

$$\boxed{f(x)=x-\frac{3x^2}{2}+\frac{11x^3}{6}-\frac{25}{12}x^4+x^4.\varepsilon(x).}$$

$$\lim_{x\to0}\varepsilon_1(x)=\lim_{x\to0}\varepsilon_2(x)=\lim_{x\to0}\varepsilon(x)=0.$$

$DL_5(0)$: $f(x) = \dfrac{1+x}{2-x^2}$.

Au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{1+x}{2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{2}(1+x).\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{-1}$.

Appliquons le d.l. à l'ordre 2 en 0 de $(1+u)^{-1}$. L'ordre 2 suffit car $u = -\frac{x^2}{2}$, et les puissances de x ne doivent pas dépasser 5.

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+x).\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+x^5.\varepsilon_1(x)\right),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^5}{8}+x^5.\varepsilon(x). \\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \end{array}}$$

1. En posant $X = \frac{1}{x}$, déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{1}{x}$ de l'expression $\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$, quand $x \to +\infty$.

2. Déterminer $\lim\limits_{+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ et $\lim\limits_{-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$. Pour $x > 0$,

$$f(x) = \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)},$$

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \text{ car } x>0 \text{ implique } \sqrt{x^2}=x.$$

$$f(x) = \frac{1}{X}\left((1+X)^{\frac{1}{2}}-(1+X^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Prenons le d.l. à l'ordre 4 (car $x = \frac{1}{X}$ est en facteur) de l'expression entre parenthèses. Pour celà, utilisons les d.l. en 0 de $(1+u)^{1/2}$ à l'ordre 4 avec $u = X$, puis à l'ordre 2 avec $u = X^2$.

$$f(x) = \frac{1}{X}.\Big(1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+\frac{1}{16}X^3-\frac{5}{128}X^4+X^4\varepsilon_1(X)$$
$$-1-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{8}X^4+X^4.\varepsilon_2(X)\Big).$$

$$\lim_{X\to 0}\varepsilon_1(X) = \lim_{X\to 0}\varepsilon_2(X) = 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{X}.\left(\frac{1}{2}X-\frac{5}{8}X^2+\frac{1}{16}X^3+\frac{11}{128}X^4+X^4.\varepsilon(X)\right),\ \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}-\frac{5}{8}X+\frac{1}{16}X^2+\frac{11}{128}X^3+X^3.\varepsilon(X),$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}-\frac{5}{8x}+\frac{1}{16x^2}+\frac{11}{128x^3}+\frac{1}{x^3}.\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).}$$

2. D'après la question 1, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$

Remarquons que l'emploi d'un d.l. n'était pas nécessaire, l'utilisation de la quantité conjuguée suffisait. Calculons d'ailleurs la limite de f en $-\infty$ par cette méthode.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+x = x(x+1)$, donc $x^2+x \geqslant 0$ pour $x\geqslant 0$ ou $x \leqslant -1$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$. Prenons donc $x\leqslant -1$.

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}},$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}},$$

$$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} \quad \text{car } x<0, \text{ donc } \sqrt{x^2} = -x.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 2, \text{ donc,}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.}$$

Soit $f(x) = \dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$. Calculer $\lim\limits_{1} f(x)$.

Cherchons l'ensemble de définition de f.

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - x^2 \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2x - x^2} \neq 0 \end{cases}$

c'est-à-dire, $\begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - x^2 \neq 1 \end{cases}$, ce qui donne :

$\boxed{x \in]0; 1[\cup]1; 2]}$ car la racine de $2x - x^2 - 1 = 0$ est 1.

Calculer $\lim\limits_{1} \dfrac{2x^2 - 1 - x}{\tan(x - 1)}$.

Posons $x = 1 + t$. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1 - x}{\tan(x-1)} = g(t) = \dfrac{2t^2 + 3t}{\tan t}$

$\lim\limits_{x \to 1} t = 0$; $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t} \underset{0}{\sim} t$.

$2t^2 + 3t \underset{0}{\sim} 3t$, donc,

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{3t}{t} = \boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 3.}$$

Déterminer éventuellement les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ aux courbes représentatives des fonctions définies par

$f(x) = \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x + 1}$.

$f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}$.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

$f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2 e^{1/x}}{x}$; c'est-à-dire $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x . e^{1/x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1$.

Il y a lieu d'étudier l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Posons $t = \dfrac{1}{x}$ $\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} t = 0\right)$, $f(x) = g(t) = \dfrac{\frac{1}{t^2} . e^t}{\frac{1}{t} + 1} = \dfrac{e^t}{t + t^2}$,

$g(t) = \dfrac{1}{t} . \dfrac{e^t}{1 + t} = \dfrac{1}{t} . e^t . (1 + t)^{-1}$. Prenons le d.l. à l'ordre 2 en 0 de $e^t . (1 + t)^{-1}$.

$e^t . (1 + t)^{-1} = \left(1 + \dfrac{t}{1!} + \dfrac{t^2}{2!} + t^2 \varepsilon_1(t)\right)\left(1 - t + t^2 + t^2 . \varepsilon_2(t)\right)$

$= 1 - t + t^2 + t - t^2 + \dfrac{t^2}{2} + t^2 . \varepsilon(t)$,

$e^t . (1 + t)^{-1} = 1 + \dfrac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$

avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Par suite, $g(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{t}{2} + t . \varepsilon(t)$, et $f(x) = x + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x} . \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$

avec $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. De ce fait,

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} . \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

La droite d'équation $\boxed{y = x}$ est asymptote à la courbe C_f représentative de f, en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ prouve qu'il existe $A > 0$ tel que, pour $x < -A$ ou $x > A$, $\left|\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| < \dfrac{1}{2}$. Donc, pour $x < -A$ ou $x > A$, $\dfrac{1}{2} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ a le signe de $\dfrac{1}{2}$, et, $f(x) - x$ qui vaut $\dfrac{1}{x} . \left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ a le signe de $\dfrac{1}{x}$. Ainsi, pour $x < -A$, $f(x) - x < 0$, et pour $x > A$, $f(x) - x > 0$. Concluons :

C_f est au dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$, au dessus au voisinage de $+\infty$.

On peut chercher l'existence d'asymptotes obliques en $-\infty$, et en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^3 \qquad\qquad -1 & x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x} & x + 5 \\
\quad 5x^3 - 2x^2 + x - 1 & \\
\quad \underline{5x^3 - 15x^2 + 10x - 5} & \\
\qquad 13x^2 - 9x + 4 &
\end{array}
$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 2x^3 - 1 = (x+5)(x^3 - 3x^2 + 2x - 1) + 13x^2 - 9x + 4$.

Sur son ensemble de définition,

$$f(x) = x + 5 + \frac{13x^2 - 9x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}.$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{13x^2 - 9x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{13}{x} = 0$, ceci prouve que la droite d'équation $\boxed{y = x + 5}$ est asymptote à la courbe C_f, représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'autre part, $f(x) - (x+5) = \frac{1}{x}\left(\frac{13x^2 - 9x + 4}{x^2 - 3x + 2 - \frac{1}{x}}\right)$ pour $x \neq 0$,

et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{13x^2 - 9x + 4}{x^2 - 3x + 2 - \frac{1}{x}} = 13$, donc, il existe $A > 0$ tel que, si $x < -A$ ou $x > A$, $\frac{13x^2 - 9x + 4}{x^2 - 3x + 2 - \frac{1}{x}} > 0$ (du signe de 13). Par suite si $x < -A$ ou $x > A$, $f(x) - (x+5)$ est du signe de $\frac{1}{x}$.

> Au voisinage de $-\infty$, $f(x) - (x+5) < 0$ $(x < -A)$, C_f est au dessous de l'asymptote. Au voisinage de $+\infty$, C_f est au dessus de l'asymptote.

Ecrivons, pour $x \neq 0$, $f(x) = \left(x - 2 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} = x\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

Posons $\frac{1}{x} = t$, prenons le d.l. à l'ordre 2 en 0 de e^t.

Alors $g(x) = \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ devient :

$$h(t) = (1 - 2t - t^2) \cdot e^{-t} = (1 - 2t - t^2)\left(1 - t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t)\right)$$

$$h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - 2t + 2t^2 - t^2 + t^2\varepsilon_2(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 + t^2\varepsilon_2(t)$$

On peut alors écrire $f(x) = x\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$;

$$f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \cdot \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

Ceci prouve que :

> la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(x) - (x-3) = \frac{1}{x}\left(\frac{3}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est du signe de $\frac{1}{x} \times \frac{3}{2}$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ (puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$). Donc,

> C_f est au dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$, au dessus au voisinage de $+\infty$.

1) Nature de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{x(x+2)^2}$.

2) Retrouver le résultat précédent en calculant une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+2)^2}$.

1) L'intégrale est impropre en 0. Ici, on ne peut pas prolonger f par continuité en 0 car sa limite est $+\infty$ à droite. Mais au voisinage de 0 (à droite), $f(x) > 0$ et $f(x)$ est équivalente à $\frac{1}{4x}$, $\int_0^1 \frac{dx}{4x}$ diverge (critère de Riemann), $\boxed{\text{donc } \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2 x} \text{ diverge.}}$

2) Inspirons-nous de l'exercice II-31 :

$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{(x+2)^2 x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$.

On trouve $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon \in]0;1[$.

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(x+2)^2 x} = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} - \frac{1}{2(x+2)^2}\right).dx,$$

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{4}\left[\ln x - \ln(x+2) + \frac{2}{x+2}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{4}\left(-\ln 3 + \frac{2}{3} + \ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{2}{2+\varepsilon}\right)$$

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I(\varepsilon) = +\infty$ car $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty$ et $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2}{2+\varepsilon} = 2$.

$\boxed{\text{Donc } I \text{ diverge.}}$

1) Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$ est convergente.

2) Vérifier que $\forall u \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\frac{2}{u^2 - 1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$.

En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{1+x}$, calculer I.

---

1) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Au voisinage de $+\infty$, $f(t) > 0$ et $f(t)$ est équivalente à $\frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{3/2}}$. D'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge, donc $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} \text{ converge.}}$ (f est C^0 sur $[1;+\infty[$)

2) Soit $u = \sqrt{1+x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$. u est de classe C^1 sur $[1;+\infty[$. Pour $X > 1$, $\int_1^X \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+X}} \frac{2\,du}{u^2-1}$ car $x = u^2 - 1$.

Utilisons l'indication du texte :

$$\int_1^X \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+X}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right).du = \left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+X}}$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{1+X}-1}{\sqrt{1+X}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

$\lim_{X \to +\infty} \frac{\sqrt{1+X}-1}{\sqrt{1+X}+1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\sqrt{X}\left(\sqrt{\frac{1}{X}+1} - \frac{1}{\sqrt{X}}\right)}{\sqrt{X}\left(\sqrt{\frac{1}{X}+1} + \frac{1}{\sqrt{X}}\right)} = 1$, donc

$\lim_{X \to +\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1+X}-1}{\sqrt{1+X}+1}\right) = 0$ (par continuité de ln),

$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$,

$I = \lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. Alors, $\boxed{I = -\ln\left(\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}\right) = 2\ln(\sqrt{2}+1)}$

Nature de intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$.

2) $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^4}{e^{\sqrt{x}}} dx$.

1) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[1;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$ et, $f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$. D'après le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx \text{ converge.}}$$ (f est C^0 sur $[1;+\infty[$).

2) L'intégrale est impropre en $+\infty$. $f(x) = \frac{x^4}{e^{\sqrt{x}}}$.

f est continue sur $[1;+\infty[$ et $\geqslant 0$. De plus, on sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^6}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x})^{12}}{e^{\sqrt{x}}} = 0$. Ceci prouve que :

$\exists A > 1 / \forall x \geqslant A$, $0 < \frac{x^6}{e^{\sqrt{x}}} \leqslant 1$, donc pour $x \geqslant A$,

$0 < x^2 f(x) \leqslant 1$, c'est-à-dire, $0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$. D'après le critère de Riemann, $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, donc $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ converge et,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{x^4}{e^{\sqrt{x}}} dx \text{ converge.}}$$

1) Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$ est convergente.

2) Calculer la valeur de I.

1) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[1;+\infty[$, $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f \text{ est } C^0 \end{cases}$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Il existe donc un réel $A \geqslant 1$ tel que si $x \geqslant A$, $\ln x \leqslant x$.

Ainsi, lorsque $x \geqslant A$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$. On déduit (v. exercice II-35) :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx \text{ converge.}}$$

2) Soit $X > 1$. Posons $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x^3}$; $v(x) = -\frac{1}{2x^2}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$.

$$I(X) = \int_1^X \frac{\ln x}{x^3} dx = \left[-\frac{\ln x}{2x^2}\right]_1^X + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{dx}{x^3}.$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln X}{X^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^X.$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln X}{X^2} - \frac{1}{4X^2} + \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{X \to +\infty} I(X) = \boxed{I = \frac{1}{4}}$$

1) Montrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} dx$ est convergente.

Ind : on utilisera le fait que $\forall \alpha > 0$, $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ pour majorer $f(x)$ par une fonction de Riemann et l'on choisira α pour assurer la convergence.

2) Calculer la valeur de I.

1) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[1;+\infty[$ $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f \text{ est } C^0 \end{cases}$. On sait que, pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$. Il existe donc un réel $A(\alpha)$ de $[1,+\infty[$ tel que, pour $x \geqslant A(\alpha)$, $0 \leqslant \ln x \leqslant x^\alpha$. Ainsi, pour $x \geqslant A(\alpha)$,

$0 \leqslant \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leqslant \frac{x^{3\alpha}}{x^2}$, c'est-à-dire $0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x^{2-3\alpha}}$.

Choisissons $\alpha > 0$ pour que $2 - 3\alpha > 1$; par exemple, $\alpha = \frac{1}{6}$. Dans ce cas, pour $x \geqslant A(\frac{1}{6})$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^{3/2}}$. On déduit ensuite que

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} dx \text{ converge}}$$

2) Soit $X > 1$. Posons $u(x) = (\ln x)^3$; $u'(x) = 3.\dfrac{(\ln x)^2}{x}$,

$v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.

u, v sont de classe C^1 sur $[1 ; +\infty[$.

$$I(X) = \int_1^X \frac{(\ln x)^3}{x^2}\,dx = \left[-\frac{(\ln x)^3}{x}\right]_1^X + 3\int_1^X \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx.$$

Posons $w(x) = (\ln x)^2$; $w'(x) = 2\,\dfrac{\ln x}{x}$,

$v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.

w est de classe C^1 sur $[1 ; +\infty[$.

$$I(X) = -\frac{(\ln X)^3}{X} + 3\left(\left[-\frac{(\ln x)^2}{x}\right]_1^X + 2\int_1^X \frac{\ln x}{x^2}\,dx\right).$$

Posons $z(x) = \ln x$; $z'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $v(x) = -\dfrac{1}{x}$. z est de classe C^1 sur $[1 ; +\infty[$.

$$I(X) = -\frac{(\ln X)^3}{X} - 3\,\frac{(\ln X)^2}{X} + 6\left(\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^X + \int_1^X \frac{dx}{x^2}\right),$$

$$= -\frac{(\ln X)^3}{X} - 3\,\frac{(\ln X)^2}{X} - 6\,\frac{\ln X}{X} - \frac{6}{X} + 6.$$

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{(\ln X)^3}{X} = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln X}{X^{1/3}}\right)^3 = 0$,

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{(\ln X)^2}{X} = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln X}{X^{1/2}}\right)^2 = 0$,

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{6}{X} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} I(X) = I$, donc,

$$\boxed{I = 6.}$$

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \sin \frac{1}{x}\,dx$.

Ind : pour la convergence en $+\infty$, intégrer par parties en faisant apparaître $\dfrac{1}{x^2}$.

– L'intégrale est doublement impropre, (f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$).

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$; $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x.\sin\frac{1}{x} = 0$.

f étant prolongeable par continuité en 0, $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x.\sin\frac{1}{x}\,dx$ converge.

Pour $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(x).dx$, intégrons par parties :

posons $u(x) = \sin\dfrac{1}{x}$; $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}.\cos\dfrac{1}{x}$, soit $X \in [\pi ; +\infty[$.

$v'(x) = \sin x$; $v(x) = -\cos x$.

$$\int_\pi^X \sin x.\sin\frac{1}{x}\,dx = \left[-\cos x.\sin\frac{1}{x}\right]_\pi^X - \int_\pi^X \frac{1}{x^2}.\cos x.\cos\frac{1}{x}\,dx.$$

$\left[-\cos x.\sin\frac{1}{x}\right]_\pi^X = -\cos X.\sin\frac{1}{X} - \sin\frac{1}{\pi}$ a pour limite $-\sin\frac{1}{\pi}$ en $+\infty$

car $|\cos X| \leq 1$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \sin\frac{1}{X} = 0$.

$\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^2}.\cos x.\cos\frac{1}{x}\,dx$ est absolument convergente (donc convergente) car $\left|\frac{1}{x^2}.\cos x.\cos\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$

et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (Riemann), de ce fait $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_\pi^X \frac{1}{x^2}.\cos x.\cos\frac{1}{x}\,dx$ est finie.

Conclusion : $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(x).dx$ converge ; $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x.\sin\frac{1}{x}\,dx \text{ converge.}}$

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \cos(\ln x)\,dx$.

. L'intégrale est impropre en 0. f ne garde pas un signe constant au voisinage de 0, et f n'a pas de limite en 0^+. Regardons $|f(x)|$. $|f(x)| \leq 1$ et $\displaystyle\int_0^1 1\,dx$ converge, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln x).dx}$ converge.

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(\tan x)\,dx$ converge et calculer sa valeur.

On pourra intégrer par parties et remarquer que

$\forall x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$. $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.

L'intégrale est doublement impropre. Opérons comme à l'exercice précédent. Posons $I(\alpha,\varepsilon)=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\cos x.\ln(\tan x).dx$ avec $0<\alpha<\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$.

Posons $u(x)=\ln(\tan x)$; $u'(x)=\frac{1}{\cos^2 x.\tan x}=\frac{1}{\sin x.\cos x}$.
$v'(x)=\cos x$; $v(x)=\sin x$ (u et v sont de classe C^1).

$I(\alpha,\varepsilon)=\left[\sin x.\ln(\tan x)\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}-\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}$

$I(\alpha,\varepsilon)=\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon).\ln(\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon))-\sin\alpha.\ln(\tan\alpha)-\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$.

$\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=\cos\varepsilon$; $\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=\cotg\varepsilon=\frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}$, donc $\ln(\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon))=\ln(\cos\varepsilon)-\ln(\sin\varepsilon)$

Ecrivons aussi $\ln(\tan\alpha)=\ln(\sin\alpha)-\ln(\cos\alpha)$. Calculons maintenant l'intégrale : $\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}.dx=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right).dx$

On trouve alors :

$\frac{1}{2}\left(\ln(1+\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon))-\ln(1-\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon))-\ln(1+\sin\alpha)+\ln(1-\sin\alpha)\right)$, c'est-à-dire

$\frac{1}{2}\left(\ln(1+\cos\varepsilon)-\ln(1-\cos\varepsilon)-\ln(1+\sin\alpha)+\ln(1-\sin\alpha)\right)$. $I(\alpha,\varepsilon)$ vaut donc

$\cos\varepsilon.\ln(\cos\varepsilon)-\cos\varepsilon.\ln(\sin\varepsilon)-\sin\alpha\ln(\sin\alpha)+\sin\alpha.\ln(\cos\alpha)+$
$-\frac{1}{2}\left(\ln(1+\cos\varepsilon)+\ln(1-\cos\varepsilon)+\ln(1+\sin\alpha)-\ln(1-\sin\alpha)\right)$

$\lim_{\alpha\to0^+}\sin\alpha.\ln(\sin\alpha)=0$ (du type $\lim_{u\to0^+}u.\ln u$). $\lim_{\alpha\to0^+}\sin\alpha.\ln(\cos\alpha)=0$.

$\lim_{\alpha\to0^+}\ln(1+\sin\alpha)=\lim_{\alpha\to0^+}\ln(1-\sin\alpha)=0$. La limite quand α tend vers 0^+ de $I(\alpha,\varepsilon)$ est le nombre $\cos\varepsilon.\ln(\cos\varepsilon)-\cos\varepsilon.\ln(\sin\varepsilon)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos\varepsilon)+\frac{1}{2}\ln(1-\cos\varepsilon)$ que l'on notera $I(\varepsilon)$. Calculons sa limite en 0^+.

$\lim_{\varepsilon\to0^+}\cos\varepsilon.\ln(\cos\varepsilon)=0$. Il reste :

$-\cos\varepsilon.\ln(\sin\varepsilon)-\ln(1+\cos\varepsilon)+\frac{1}{2}\ln(1+\cos\varepsilon)+\frac{1}{2}\ln(1-\cos\varepsilon)$

$=-\ln(1+\cos\varepsilon)-\cos\varepsilon.\ln(\sin\varepsilon)+\frac{1}{2}\ln(1-\cos^2\varepsilon)$

$=-\ln(1+\cos\varepsilon)-\cos\varepsilon.\ln(\sin\varepsilon)+\ln(\sin\varepsilon)$ car $\begin{cases}1-\cos^2\varepsilon=\sin^2\varepsilon\\ \varepsilon\to0^+ \text{ donc } \sin\varepsilon>0.\end{cases}$

$=-\ln(1+\cos\varepsilon)+(1-\cos\varepsilon).\ln(\sin\varepsilon)$

$=-\ln(1+\cos\varepsilon)+\frac{1-\cos^2\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}.\ln(\sin\varepsilon)$.

$\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln(1+\cos\varepsilon)=\ln 2$. $\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1-\cos^2\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}\ln(\sin\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\sin^2\varepsilon.\ln(\sin\varepsilon)}{1+\cos\varepsilon}$
$=0$.

Donc $\lim_{\substack{\alpha\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}I(\alpha,\varepsilon)=-\ln 2$.

Conclusion : $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\ln(\tan x).dx \text{ converge et vaut } -\ln 2.}$

Remarque : On peut aller un peu plus vite si l'on sait que $x\mapsto\frac{1}{\cos x}$ admet pour primitive $x\mapsto\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right|$

1) Montrer que l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$. converge.

2) Montrer que l'intégrale $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)dt$ converge et vaut I (penser à un changement de variable).

3) Montrer que l'intégrale $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2t))dt$ converge et vaut I (penser à un changement de variable puis utiliser la relation de Chasles).

4) Calculer $I+J$ et en déduire la valeur de I (on rappelle la formule trigonométrique : $\sin(2t)=2\sin t.\cos t$) .

1) L'intégrale est impropre en 0. Sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, $f(t)$ est <0, donc de signe constant. On va remplacer f par une fonction équivalente.

$\sin t$ est équivalent à t au voisinage de 0 et a une limite autre que 1, donc $\ln(\sin t)$ est équivalent à $\ln t$. On sait que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln t.dt$ converge, donc $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t).dt \text{ converge.}}$

2) L'intégrale est impropre en $\frac{\pi}{2}$. Soit $\varepsilon\in]0,\frac{\pi}{2}[$.

$J(\varepsilon)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\ln(\cos t).dt$. Posons $t=\frac{\pi}{2}-u$; $dt=-du$

$J(\varepsilon)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon}\ln(\sin u).du=\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u).du$ car $\cos(\frac{\pi}{2}-u)=\sin u$.

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} J(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u).du = I$. Donc :

$$\boxed{J \text{ converge et } J = I.}$$

3) L est impropre en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. L converge si et seulement si $L_1(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t).dt$ et $L_2(\varepsilon) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ln(\sin 2t).dt$ ont une limite finie quand ε tend vers 0^+. Dans ce cas $L = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} (L_1 + L_2)(\varepsilon)$.

Posons $2t = u$; $dt = \frac{1}{2}.du$. $L_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{2\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u).du$,

$L_2(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - 2\varepsilon} \ln(\sin u).du$. Posons maintenant $u = \pi - x$; $du = -dx$,

$L_2(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\varepsilon} \ln(\sin x).dx = \frac{1}{2}\int_{2\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x).dx$ car $\sin(\pi - x) = \sin x$.

(Les changements de variables sont de classe C^1).

Remarquons alors que L_2 converge si et seulement si L_1 converge. L_1 converge effectivement, d'après la première question, vers $\frac{1}{2}I$. De ce fait L_2 converge aussi vers $\frac{1}{2}I$. Par suite, L converge vers $L_1 + L_2 = I$. Conclusion :

$$\boxed{L \text{ converge et } L = I.}$$

4) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t).dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin t) + \ln(\cos t)).dt$,

(l'intégrale converge comme somme d'intégrales convergentes sur le même intervalle).

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t.\cos t).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right).dt$,

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\frac{1}{2} + \ln(\sin 2t)\right).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2}.dt + L = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + L$.

Mais $I + J = 2I$ et $L = I$, donc,

$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$, et, $\boxed{I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.}$

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2y + 4xy^2 + xy^4}{x^2 + y^2}$, pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1) Vérifier que f est continue au point $(0,0)$.

2) Calculer p et q pour $(x,y) \neq (0,0)$ puis pour $(0,0)$.

La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

1) On doit montrer que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$|f(x,y)| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{xy^4}{x^2+y^2}\right| = |y|\frac{x^2}{x^2+y^2} + 4|x|\frac{y^2}{x^2+y^2} + |xy^2|\frac{y^2}{x^2+y^2}$

Mais $0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, $0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$ et $|y| \geq 0$, $4|x| \geq 0$, $|xy^2| \geq 0$, donc,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $|f(x,y)| \leq |y| + 4|x| + |xy^2|$.

Ayant $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} |y| = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} 4|x| = 0 = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} |xy^2|$. On déduit,

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$ (théorème des encadrements). Donc :

$$\boxed{f \text{ est continue en } (0,0).}$$

2) Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f est rationnelle, donc, p et q existent.

$\forall (x,y) \neq (0,0)$, $p(x,y) = \dfrac{(2xy + 4y^2 + y^4)(x^2+y^2) - 2x(x^2y + 4xy^2 + xy^4)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\boxed{p(x,y) = \frac{-4x^2y^2 - x^2y^4 + 2xy^3 + 4y^4 + y^6}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$q(x,y) = \frac{(x^2 + 8xy + 4xy^3)(x^2+y^2) - 2y(x^2y + 4xy^2 + xy^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boxed{q(x,y) = \frac{x^4 + 8x^3y + 4x^3y^3 - x^2y^2 + 2xy^5}{(x^2+y^2)^2}}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \boxed{0 = p(0,0)}$; $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \boxed{0 = q(0,0)}$

Inspirons-nous de l'exercice précédent :

$\lim\limits_{x \to 0} p(x,x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^4}{4x^4} = \dfrac{1}{2}$, ce qui est $\neq p(0,0)$. p n'est donc pas continue en $(0,0)$; ceci suffit pour conclure :

$$\boxed{f \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ en } (0,0) \text{ ; elle ne l'est donc pas sur } \mathbb{R}^2.}$$