Mathématiques

Cahier de vacances

François Delaplace
Professeur de mathématiques, lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles)

Après une année studieuse passée en classe préparatoire, il est bien légitime de penser enfin à se reposer ; mais prudence, réservons-nous quelques jours, disons les quinze derniers jours de vacances, pour faire le point sur nos connaissances ; est-ce vraiment nécessaire ?

La réponse est dans le test qui suit :

Oubliez tout, partez en vacances et si, vers le 15 août, vous êtes capable de répondre correctement au petit test suivant, alors vous êtes prêt pour la rentrée. Mais si vous vous trompez sur un certain nombre de questions ou si certaines vous sont complètement étrangères, il est temps de vous y remettre. Vous trouverez dans les pages qui suivent de quoi vous aider à vous remettre dans l'ambiance.

D'autre part, suite à la demande de certains d'entre vous, vous y trouverez également un petit article vous donnant un aperçu de l'utilisation d'*Excel*™ pour effectuer du calcul matriciel.

Les exercices marqués d'une étoile (★) sont faisables par tous et ne présentent pas de grandes difficultés.

Les exercices marqués de deux étoiles (★★) sont plus difficiles mais sont faisables pour les options scientifiques et les options économiques.

Les exercices marqués du symbole (💣) sont réservés aux options scientifiques par les connaissances qu'ils demandent.

Bonnes vacances à tous.

F. D.

QCM

	Propositions	V	F
1	Si f est une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J, et si f et f^{-1} sont dérivables, alors, pour tout x appartenant à J, $\left(f^{-1}\right)'(x) \neq 0$		
2 💣	Si f est une fonction définie sur [0, 1] telle que - f est C^1 sur [0, 1[- $\exists a \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f'(x) = a$ Alors f est C^1 sur [0, 1]		
3	Soit n un entier strictement positif, a et b tels que $a < b$ et f est une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, alors, on peut toujours affirmer que $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(b-t)\,dt$		

4	La fonction $x \mapsto \lvert x \rvert$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.		
5	Pour tout polynôme non nul P, $P(x)\cdot e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x^2}$		
6	Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme positif et de raison $q \in \left]0,1\right[$; alors pour tout entier naturel n, $u_n \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$		
7	Pour toute suite (v_n) la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + v_n$ est une suite non monotone.		
8	Si (u_n) est une suite de nombre réels, n'ayant pas de limite finie, alors elle n'est pas monotone		
9	Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres décimaux.		
10	Soit a et b deux nombres réels tels que $\forall \varepsilon > 0, \quad \lvert a-b \rvert \le \varepsilon$ On en déduit que $a = b$		
11	Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite λ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k$		
12	Si (u_n) est une suite majorée par un réel a, alors la série $\sum u_n$ est majorée par le réel a.		
13	Si $\sum u_n$ est une série convergente, la série $\sum (-1)^n u_n$ est aussi convergente.		
14	Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $Ker(f) = Ker(g)$ et $Im(f) = Im(g)$. On a nécessairement $f = g$		
15	Si X est une variable aléatoire discrète ayant une espérance $E(X)$, alors la variable $\lvert X \rvert$ a aussi une espérance		
16	Il existe des fonctions de répartition décroissantes		
17	Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p et si Y suit une loi binomiale de paramètres n et q, alors, si X et Y sont indépendantes, $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p + q$.		
18	Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, si Y suit une loi binomiale de paramètres n et q, et si $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres n et $p + q$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.		
19	Soit n un entier supérieur à 1. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ?		
20	Si N est une matrice carrée d'ordre $n > 1$ telle que $N^2 = N$, alors $\mathrm{rg}(N) = n$		
21	Si N est une matrice carrée d'ordre n telle que $N^2 = N$ et si $\mathrm{rg}(N) = n$ alors $N = I$.		
22	Si N est une matrice carrée d'ordre $n > 1$ alors tous les termes de N^2 sont positifs		
23	Si A et B sont deux matrices carrées telles que $AB = I$, alors BA est-il aussi égal à I ?		
24	Si A est une matrice carrée, symétrique et inversible, son inverse est symétrique ?		

Le calcul matriciel avec Excel™

Vous êtes de plus en plus nombreux à posséder un ordinateur et la plupart d'entre vous souhaite pouvoir s'auto corriger sur les calculs sans avoir à faire l'acquisition de logiciels spécifiques ou de programmes.
Je propose ici, un moyen simple d'effectuer pas à pas la méthode de Gauss sous Excel™, pour réduire une matrice ou pour obtenir son inverse, uniquement à l'aide des produits de matrices.
Dans l'exemple qui suit, je considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ouvrons un classeur Excel et écrivons sur la feuille 1, la matrice A d'ordre 3 dans les cellules E2 à E4. Pour des raisons de lisibilité, j'ai réduis la largeur des colonnes (de la largeur standard 10,71 je suis passé à 5) et j'ai mis des bordures autour de la matrice.

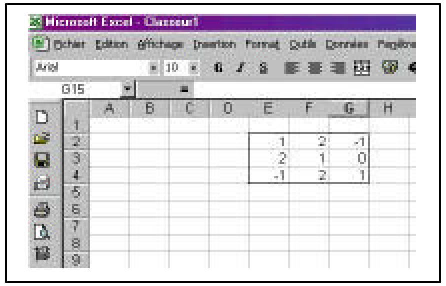
Réduisons-la par la méthode de Gauss pour résoudre par exemple, l'équation $AX = 0$.
Les opérations que je désire d'abord effectuer sur les lignes de A sont les suivantes :

- remplacer L2 par L2 – 2L1
- remplacer L3 par L3 + L1

On appellera A_1 cette nouvelle matrice.
En effectuant ces mêmes opérations sur la matrice identité, on obtient une matrice T_1, appelée matrice de cette transformation ; on a

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons cette matrice sur les cellules B2 à D4, à gauche de la matrice A (voir fg 1).



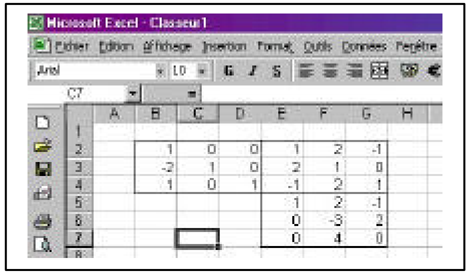
fg 1

Réponses au QCM en fin d'article

En effectuant le produit de la matrice T_1 par la matrice A, on obtient précisément la matrice A_1. Pour faire ce calcul,

- sélectionnons la plage de cellules E5-G7
- dans le menu insertion, cliquons sur « Fonction … »
- dans la catégorie « Math & Trigo », cliquons « ProduitMat »
- Pour la matrice 1, sélectionnons la plage B2-D4
- Pour la matrice 2, sélectionnons la plage E2-G4
- Appuyer simultanément sur les touches « Ctrl » « Maj » et « Entrée »
  Attention : ne pas cliquer sur « OK »

Si vous y mettez des bordures, vous avez obtenu ce que vous voyez fg 2.



fg 2

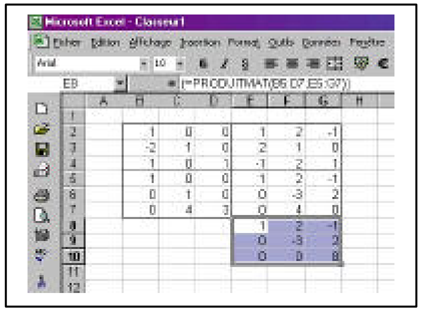
L'opération que je désire maintenant effectuer sur les lignes de A_1 est la suivante :

- remplacer L3 par 3L3 + 4L2

On appellera A_2 cette nouvelle matrice.
En effectuant ces mêmes opérations sur la matrice identité, on obtient une matrice T_2, appelée matrice de cette transformation ; on a

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ecrivons cette matrice sur les cellules B5 à D7, à gauche de la matrice A_2.
On effectue le produit de la matrice T_2 par A_1 comme ci-dessus et on écrira le produit dans les cellules E8 à G8 (fg3)



fg 3

La réduite de Gauss de la matrice A est

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que l'équation $AX = 0$ admet une solution unique : $X = 0$.

Remarque : Par cette méthode, nous voyons que $A_1 = T_1 \cdot A$ puis que $A_2 = T_2 \cdot A_1$; il s'ensuit que $A_2 = (T_2T_1)A$ ou encore :

$$A = (T_2T_1)^{-1} A_2$$

On voit que A est le produit d'une matrice triangulaire inférieure par une matrice triangulaire supérieure.

Suites d'éléments de nombres réels

Dans ce premier exercice, je vous propose une application importante du cours

Exercice 1 (★)

Soit (v_n) la suite que nous supposerons définie pour tout entier naturel n par :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} v_n \quad \textit{et par} \quad v_0 = 1$$

Déterminer v_n sous forme de somme, en fonction de n.

Corrigé de l'exercice 1

Procédons en deux étapes : d'abord, ramenons-nous à une suite de la forme $u_{n+1} = a_n u_n + b_n$ avec a_n positif. Pour ce faire, on pose, pour tout entier naturel n, $v_n = (-1)^n u_n$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (-1)^{n+1} u_{n+1} = 1 - (-1)^n \frac{u_n}{n+1}$$

En multipliant les deux membres par $(-1)^{n+1}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Maintenant ramenons-nous à une suite de la forme $u_{n+1} = u_n + b_n$; pour ce faire, multiplions les deux membres par $(n+1)!$; on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\,u_{n+1} = n!\,u_n + (-1)^{n+1}(n+1)!$$

posons $w_n = n!\,u_n$; on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n + (-1)^{n+1}(n+1)!$$

On conclut par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k! = w_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{-k} k!$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{w_0}{n!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{-k} k! \ \text{ et } \ w_0 = u_0$$

Enfin, pour tout entier naturel n,

$$v_n = (-1)^n \frac{w_0}{n!} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{n!} \ \text{ et } \ w_0 = (-1)^0 v_0 = 1$$

Finalement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{n!}$$

Fonctions d'une seule variable

Bien que ne tournant que sur une seule notion, la continuité des fonctions monotones, cet exercice nécessite un certain recul ; je vous laisse juge.

Exercice 2 (★★)

Un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points est un ensemble tel que, quel que soit a et b éléments de I, quel que soit x compris entre a et b, x est élément de I ; on écrit :

I intervalle de $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall (a, b) \in I^2,\ a < b,\ \forall x \in [a, b],\ x \in I$

On admettra d'autre part, qu'un **intervalle non vide** I de $\mathbb{R}$ **est fermé** si, toute suite (x_n) d'éléments de I, convergente dans $\mathbb{R}$, admet sa limite dans I. Les intervalles fermés non vide de $\mathbb{R}$ sont de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$ ou $[a, b]$.

Soit f une fonction continue et monotone d'une variable x définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad |x-y| \le |f(x) - f(y)|$$

1. *Montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.*

   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que f est une fonction croissante.
2. *Montrer que f admet des limites en $+\infty$ et en $-\infty$ qu'on précisera. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
3. *Dans cette question, on suppose qu'il existe deux réels a et b tels que*

   $a < b$ et $a \le f(a) < f(b) \le b$

   En utilisant la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$, montrer qu'il existe un réel c appartenant à $[a, b]$ tel que $f(c) = c$. Montrer alors que $f(a) = a$ et que $f(b) = b$. Que peut-on dire de la restriction de f à l'intervalle $[a, b]$?
4. *On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$; montrer que la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$ est monotone, puis qu'elle a une limite finie en $+\infty$.*

   Que peut-on dire si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$?

   Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = x\}$. Montrer que si A est vide alors on est dans l'un des deux cas évoqué ci-dessus.
5. *On suppose que $A \neq \varnothing$. Donner un exemple de fonction f pour laquelle l'ensemble A est un singleton $\{a\}$.*
   On suppose maintenant que A contient au moins deux points. Montrer que A est un intervalle fermé.

Corrigé de l'exercice 2

1. C'est évident :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \left[x \neq y \ \Rightarrow\ 0 < |x-y| \le |f(x) - f(y)|\right]$$

   et donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$; il s'ensuit que f est monotone et injective ; elle est donc strictement monotone.
2. On peut, si le cœur nous en dit, utiliser le théorème de la limite monotone pour prouver l'existence dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) des limites en l'infini ; mais on peut aussi faire d'une pierre deux coups : prouver l'existence des limites et donner leurs valeurs.
   Supposons $x > y$; la croissance stricte de f nous permet d'écrire :

   $0 < x - y \le f(x) - f(y) \qquad (1)$

   Ainsi, pour $y = 0$, on a, pour tout réel x strictement positif,

   $f(x) \ge x + f(0)$

On en déduit, que f a une limite en $+\infty$ et que cette limite est $+\infty$.
De même, pour $x = 0$ dans la relation (1), on a pour tout y strictement négatif,

$$f(y) \leq y + f(0)$$

Là aussi, on en déduit que f a une limite en $-\infty$ et que cette limite est $-\infty$.
Récapitulons :

- f strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- f continue sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$; on a :
   - g continue sur $[a, b]$
   - $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$

   Donc, il existe un réel c (au moins) de $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = c$.
   Montrons maintenant que $f(a) = a$ et que $f(b) = b$.
   Appliquons la relation (1) avec $x = c$ et $y = a$; on a : $f(a) \leq a$; or $f(a) \geq a$ par hypothèse dans cette question, on en déduit donc que $f(a) = a$.
   Appliquons à nouveau la relation (1) avec $y = c$ et $x = b$; on a : $f(b) \geq b$; or $f(b) \leq b$ par hypothèse dans cette question, on en déduit donc que $f(b) = b$.
   Nous avons ainsi démontré l'implication (2) :

   $$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq f(a) < f(b) \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) = a \text{ et } f(b) = b$$

   Montrons que la restriction de f à $[a, b]$ est l'application identique.
   Soit x un élément quelconque de $[a, b]$.
   Ou bien $f(x) \leq x$ et dans ce cas, on utilise l'implication (2) pour $b = x$; il s'ensuit alors que $f(x) = x$,
   Ou bien $f(x) \geq x$ et dans ce cas, on utilise l'implication (2) pour $a = x$; il s'ensuit alors que $f(x) = x$.
   Donc la restriction de f à $[a, b]$ est l'application identique.
4. Soit x et y deux réels tels que $x \geq y$. De la relation (1) et de l'hypothèse faite sur f dans cette question, on déduit :

   $$f(y) - y \leq f(x) - x < 0$$

   c'est-à-dire $g(y) \leq g(x) < 0$
   Il en résulte que g est croissante et strictement négative. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit que g a une limite en $+\infty$; le fait que g soit majorée par 0 implique que cette limite est négative ou nulle.
   Soit x et y deux réels tels que $x \geq y$. De la relation (1) et de l'hypothèse faite sur f dans cette question, on déduit :

   $$0 < f(y) - y \leq f(x) - x$$

   c'est-à-dire $0 < g(y) \leq g(x)$.
   Il en résulte que g est croissante et strictement positive. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit que g a une limite en $-\infty$; le fait que g soit minorée par 0 implique que cette limite est positive ou nulle.
   L'ensemble A peut s'écrire :

   $$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ g(x) = 0\}$$

   Etudions ici le cas où l'ensemble A est l'ensemble vide ; supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $a < b$ et $g(a) < 0 < g(b)$; la continuité et la stricte monotonie de g impliquerait l'existence d'un réel c, compris entre a et b tel que $g(c) = 0$; or A est l'ensemble vide. Il y a donc une contradiction.
   On en déduit donc que si a est un réel vérifiant $f(a) < a$, (resp : $f(a) > a$) alors pour tout réel b supérieur (resp : inférieur) à a, $f(b) < b$; la croissance de g permet décrire l'inégalité pour tout $b < a$ (resp : $b > a$).
   En conclusion, s'il existe un réel a tel que $f(a) < a$ (resp : $f(a) > a$), alors pour tout réel x, $f(x) < x$ (resp : $f(x) > x$) et nous sommes dans les deux cas évoqués ci-dessus.
5. Posons f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - a$; il est clair que f est continue et monotone sur $\mathbb{R}$ et que de plus, pour tout réels x et y,

   $$|f(x) - f(y)| = |(2x - a) - (2y - a)| = 2|x - y| \geq |x - y|$$

   On vérifie immédiatement que $A = \{a\}$.
   On suppose maintenant que A contient au moins deux points ; soit a et b, avec $a < b$, deux points quelconque de A ; on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$; d'après la question 3, la restriction de f à $[a, b]$ est l'identité ; donc quel que soit le réel x compris entre a et b, x appartient à A et par suite, A est un intervalle.
   Pour montrer que A est fermé, on va montrer que toute suite (x_n) d'éléments de A, convergente dans $\mathbb{R}$, admet sa limite dans A.
   Si (x_n) est une suite d'éléments de A, convergente vers un réel x, alors $\left(g(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à la suite nulle ; g continue en 0, on en déduit donc

   $$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = 0 .$$

   et donc que x appartient à A. Donc A est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (★)

1. *Pour tout nombre réel x, on note* $\lfloor x \rfloor$ *sa partie entière. Déterminer*

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

2. *Soit x un nombre réel quelconque, fixé. Déterminer*

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

3. *En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres décimaux.*
4. *On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux ; en utilisant la question précédente, montrer que si a et b sont deux réels tels que a < b, alors* $]a, b[\cap \mathbb{D} \neq \varnothing$

Corrigé de l'exercice 3

1. De la définition $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$, on déduit $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$. Par le théorème d'encadrement (couramment appelé théorème des gendarmes),
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$$
2. Si x est nul, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = 0$ et on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = 0 = x$.
Supposons x strictement positif ; $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \cdot x$; or, x étant strictement positif, $\lim_{n\to+\infty} (nx) = +\infty$; on peut appliquer la question précédente :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \cdot x \right) = x$$
Enfin si x est strictement négatif, $\lim_{n\to+\infty} (nx) = -\infty$ et on peut encore appliquer la première question :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \cdot x \right) = x$$
Ainsi, pour tout réel x,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$
3. Soit a un nombre réel ; si a est un nombre décimal, on considère la suite constante $(x_n) = (a)$. Cette suite est convergente de limite a et répond à la question.
Si a est un nombre réel non décimal, on pose, pour tout entier naturel n,
$$x_n = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$$
D'après la question précédente, la suite (x_n) est convergente de limite a.
Exemple : Les premiers termes de la suite de nombres décimaux convergente vers π est

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	3	3,1	3,14	3,141	3,1415	3,14159	3,141592

4. Considérons l'élément $x = \frac{a+b}{2}$ de $]a, b[$. Ou bien x est un nombre décimal et dans ce cas $]a, b[\cap \mathbb{D} \neq \varnothing$, ou bien x n'est pas un nombre décimal. On considère alors la suite (x_n) d'éléments de D définie pour tout entier naturel n par :
$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$
Cette suite est convergente vers le réel x. D'après la définition de la convergence d'une suite, on peut écrire :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \ge N,\ |x_n - x| \le \varepsilon$$
En l'appliquant à $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$, on a pour $n = N$,
$$|x_N - x| \le \frac{b-a}{3} < \frac{b-a}{2}$$
Il s'ensuit que $x_N \in \left] x - \frac{b-a}{2},\ x + \frac{b-a}{2} \right[=]a, b[$; comme par ailleurs, x_N est un nombre décimal, on a encore dans ce cas, $]a, b[\cap \mathbb{D} \neq \varnothing$.

Dans l'exercice suivant, on se propose de déterminer toutes les fonctions continues vérifiant certaines relations. Cet exercice fait intervenir la continuité séquentielle et le fait que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres décimaux (exercice 3).

Exercice 4 (★★)

1ère partie

On note F l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(1) \begin{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y)\, f(x-y) = \left[f(x)\, f(y) \right]^2 \\ f(0) \ge 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que F n'est pas l'ensemble vide.*
2. *Quelles sont les valeurs possibles de f(0) ?*
3. *Montrer que f(0) = 0 si, et seulement si, f est la fonction nulle.*

4. *On suppose qu'il existe un élément f de F non nul et on suppose dans cette question que f s'annule pour une valeur $a \neq 0$. Montrer que quel que soit l'entier naturel n,*

   $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0$ *; en déduire une contradiction.*

5. *On suppose que f est un élément non nul de F ; calculer f(0) ; montrer que pour tout réel x, f(x) > 0 et que f est une fonction paire.*

2ème partie

On désigne par G l'ensemble des fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies pour tout réel x par :

$$\exists f \in F,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad g(x)=\ln\left[f(x)\right]$$

1. *Montrer que tout élément g de G est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie :*

   $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad g(x+y)+g(x-y)=2\left[g(x)+g(y)\right]$ *(2)*
2. *Déterminer g(0) et montrer que g est une fonction paire.*
3. *Démontrer que pour tout entier naturel n,*

   $\forall x \in \mathbb{R},\quad g(nx)=n^2 g(x)$

   Montrer que la relation précédente reste vraie pour n entier relatif.
4. *Montrer que pour tout nombre rationnel r et pour tout réel x,* $g(r\cdot x)=r^2 g(x)$.
5. *On admet que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres décimaux et on pose g(1) = λ ; déterminer g(r) pour tout rationnel r, puis, déterminer g(x) pour x réel.*
6. *Déterminer l'ensemble F.*

Corrigé de l'exercice 4

1ère partie

1. F n'est pas vide puisqu'il contient la fonction nulle.
2. En remplaçant x et y par 0 dans la relation (1), on obtient $\left[f(0)\right]^2=\left[f(0)\right]^4$. On en déduit,

   $$\left[f(0)\right]^2\left(\left[f(0)\right]^2-1\right)=0$$

   Et par suite, $f(0)=0$ ou bien $f(0)=1$; le cas où $f(0)=-1$ est à exclure car $f(0)\geq 0$.

3. On suppose que $f(0)=0$; alors, pour tout réel x, $f(x+x)f(x-x)=\left[f(x)f(x)\right]^2$ et donc $\left[f(x)\right]^2=f(2x)f(0)=0$ et par suite $f(x)=0$.

   Réciproquement, si f est la fonction nulle, en particulier, $f(0)=0$.

   D'où l'équivalence.
4. Soit f un élément non nul de F et un réel a non nul tel que $f(a)=0$. Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0$

   Avant toute chose, notons que d'après la question précédente, $f(0)\neq 0$.

   Initialisation : $f\left(\frac{a}{2^0}\right)=f(a)=0$, donc la propriété est vraie pour $n=0$.

   Hypothèse de récurrence : On suppose que pour un n quelconque fixé, $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0$

   Hérédité : On doit en déduire que $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)=0$.

   On a, en remplaçant x et y par $\frac{a}{2^n}$ dans (1), $\left(f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right)^2=f\left(\frac{a}{2^n}\right)f(0)$. Or

   $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0$ par hypothèse de récurrence, donc $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)=0$.

   Conclusion : Pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0$.

   La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en 0 et on a :

   $$f(0)=\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a}{2^n}\right)=0$$

   Ce qui contredit le fait que f ne s'annule pas en 0.
5. On déduit de la question précédente que si f est un élément de F qui ne s'annule pas en 0, alors :

   $f(0)=1$

   $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 0$ et comme $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 0$, on en déduit que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>0$.

   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$; montrons que quel que soit le réel x, $f(-x)=f(x)$.

   Remplaçons dans la relation (1) x par 0 et y par x. On obtient :

   $f(x)f(-x)=\left[f(0)f(x)\right]^2 \Leftrightarrow f(x)f(-x)=1\left[f(x)\right]^2$

   Comme $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 0$, on en déduit que $f(-x)=f(x)$ et donc f est paire.

2ème partie

1. Pour tout réel u, $f(u)>0$; donc quels que soient les réels x et y, $f(x+y)>0$, $f(x-y)>0$, $f(x)>0$ et $f(y)>0$. Leurs logarithmes existent et on a :

$$\forall x, y\in \mathbb{R},\quad \ln f(x+y)+\ln f(x-y)=2\left[\ln f(x)+\ln f(y)\right]$$

et donc :

$$\forall x, y\in \mathbb{R},\quad g(x+y)+g(x-y)=2\left[g(x)+g(y)\right]$$

la fonction $g = \ln f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions continues.

2. En remplaçant x et y par 0 dans la relation (2), on obtient :

$$g(0)+g(0)=2\left[g(0)+g(0)\right]$$

Et donc $g(0) = 0$. En remplaçant x par 0 et y par $-x$, on a :

$$g(x)+g(-x)=2\left[g(0)+g(x)\right]=2g(x)$$

Comme $g(0) = 0$, on obtient après réduction $g(-x)=g(x)$ et par suite g est une fonction paire.

3. Montons par récurrence sur n que $\forall x\in\mathbb{R},\ g(nx)=n^2 g(x)$.

Initialisation : La relation est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g(0x)=0^2 g(x)=0 \text{ et } \forall x\in \mathbb{R},\ g(1x)=1^2 g(x)=g(x)$$

Hypothèse de récurrence : On suppose la relation vraie jusqu'à un rang n quelconque fixé supérieur ou égal à 1 ; en particulier :

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g(nx)=n^2 g(x) \text{ et } g((n-1)x)=(n-1)^2 g(x).$$

Hérédité : $\forall x\in \mathbb{R},\ g(nx+x)+g(nx-x)=2\left[g(nx)+g(x)\right]$; on en déduit

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g((n+1)x)=2\left[g(nx)+g(x)\right]-g((n-1)x)$$

soit, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g((n+1)x)=2\left(n^2+1\right)g(x)-(n-1)^2 g(x)$$

Et après réduction :

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g((n+1)x)=(n+1)^2 g(x)$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $\forall x\in\mathbb{R},\ g(nx)=n^2 g(x)$.

La parité de g permet d'écrire pour n entier négatif,

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g(nx)=g(-nx)=(-n)^2 g(x)=n^2 g(x)$$

4. Soit r un nombre rationnel ; il existe deux entiers p et q tels que

$$\begin{cases} p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}^*,\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ r=\dfrac{p}{q} \end{cases}$$

On a :

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g(px)=p^2 g(x)=g(qr\cdot x)=q^2 g(r\cdot x)$$

Donc

$$\forall x\in \mathbb{R},\ g(r\cdot x)=\frac{p^2}{q^2}g(x)=r^2 g(x) \qquad (3)$$

5. On pose $g(1)=\lambda$; alors on a immédiatement pour tout rationnel r, en remplaçant x par 1 dans l'expression (3) ci-dessus, $g(r)=\lambda r^2$

On a montré dans l'exercice 3 que tout nombre réel est limite d'une suite de décimaux ; soit x un nombre réel et (r_n) une suite de nombres décimaux convergente vers x. la continuité de g en x implique :

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty} g(r_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda {r_n}^2\right)=\lambda x^2$$

6. D'après ce qui précède, on a l'inclusion

$$F\subset\{0\}\cup\left\{f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\,/\,\exists\lambda\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{\lambda x^2}\right\}$$

On vérifie immédiatement que toute fonction de la forme $x\mapsto e^{\lambda x^2}$ est bien un élément de F ; en effet, on a la relation :

$$e^{\lambda(x+y)^2}e^{\lambda(x-y)^2}=e^{\lambda\left[(x+y)^2+(x-y)^2\right]}=e^{\lambda(4xy)}=\left(e^{\lambda x}\right)^2\left(e^{\lambda y}\right)^2$$

et on en déduit donc que

$$F=\{0\}\cup\left\{f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\,/\,\exists\lambda\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{\lambda x^2}\right\}.$$

L'exercice qui suit, met en lumière deux fautes aussi graves que fréquentes sur une même limite que tout étudiant de seconde année doit s'avoir traiter sans réfléchir.

Exercice 5 (★)

Pour déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}$$

deux étudiants proposent les solutions suivantes :

1ère solution

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$$

Quel que soit le réel x, $1^{\lfloor x\rfloor}=1$*; et par suite, on a:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}=\lim_{x\to+\infty}1^{\lfloor x\rfloor}=1$$

2ème solution
Pour tout réel x supérieur à 2, par exemple :

$$0<1-\frac{1}{x}<1$$

Or, quel que soit le réel $q\in\left]0,1\right[$, $\lim_{n\to+\infty}q^n=0$. *Il en résulte que* $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}=0$

Les deux solutions proposées sont fausses ; pourquoi ?
Déterminer cette limite.

Corrigé de l'exercice 5

Dans un cas comme dans l'autre, pour calculer la limite demandée, l'étudiant calcule des limites « partielles »:

Le premier considère **d'abord** la limite de $\left(1-\frac{1}{x}\right)$, **puis** de 1^n , ce qui est absurde car on ne peut pas faire tendre *x* vers l'infini dans une partie de l'expression sans le faire tendre vers l'infini dans toute l'expression; on obtient en fait une forme indéterminée 1^∞

Le deuxième **fixe** une valeur de *x* et remarque que $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ est un réel strictement compris entre 0 et 1 ; on l'élève à la puissance $\lfloor x\rfloor$; mais, lorsqu'on dit

$$"-1<q<1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}q^n=0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}=0"$$

on commet l'erreur classique d'oublier que *q* doit être une constante, je veux dire une expression indépendante de l'exposant, ce qui n'est pas le cas dans l'expression considérée.

A vrai dire, lorsque *x* tend vers l'infini, $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ tend vers 1 et on a une forme indéterminée connue : 1^∞.

Il existe trois formes indéterminées 1^∞, 0^0 et ∞^0 qui se traite de la même façon:
dans chacun de ces cas, **l'exposant est variable**, donc l'écriture donnée est celle d'une **exponentielle**.

Ecrivons l'expression sous forme exponentielle :

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}=e^{\lfloor x\rfloor\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

Utilisons alors la limite trouvée dans l'exercice 3 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$; on peut écrire :

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}=e^{\left(x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\frac{\lfloor x\rfloor}{x}}$$

On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=-1$ car $\ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim}u$; on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Calcul intégral

Maintenant, nous vous proposons un petit exercice donné à l'oral de l'ESCP ; il fait le lien entre fonction définie par une intégrale et primitive (pour les fonctions continues). Exercice sans trop de difficultés, accessible à tous.
Toutefois, nous admettrons, pour la dernière question, la propriété suivante :

- *Si f est une fonction continue sur un intervalle*]*b, a*] ou [*a, b*[
- *Si f est de classe* C^1 *sur*]*b, a*[*ou*]*a, b*[
- *Si f' a une limite finie en a*

Alors f est de classe C^1 *sur*]*b, a*] ou [*a, b*[.

Exercice 6 (★★)

Pour tout réel x > 0, on pose $g(x)=\int_1^x\frac{\cos t}{t}dt$, *et pour tout réel x non nul,*

$$f(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt .$$

1. *Montrer que f est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *et étudier sa parité.*
2. *Montrer que g est définie, continue et de classe* C^1 *sur* $\left]0,+\infty\right[$ *; calculer g'(x).*
3. *Donner une relation simple entre f et g sur* $\left]0,+\infty\right[$ *et sur* $\left]-\infty,0\right[$
4. *Donner l'expression de f'(x) pour tout réel x non nul.*
5. *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que f admet une limite en +∞.*

6. *Déterminer*

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}\,dt$$

En déduire que f admet une limite en 0 qu'on précisera.

7. *Montrer que f prolongée en 0 par la valeur de la limite trouvée ci-dessus, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Corrigé de l'exercice 6

1. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto 3x$ sont de classes C^1 sur]–∞, 0[et sur]0, +∞[à valeurs respectivement dans]–∞, 0[et dans]0, +∞[. La fonction $t\mapsto\frac{\cos t}{t}$ est continue sur]–∞, 0[et sur]0, +∞[donc la fonction *f* est définie et aussi de classe C^1 sur chacun des intervalles]–∞, 0[et]0, +∞[. On notera $D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Ainsi, pour tout réel *x* appartenant à *D*, –*x* y appartient aussi et

$$f(-x)=\int_{-x}^{-3x}\frac{\cos t}{t}\,dt$$

On considère le changement de variable $t=-u$; concrètement, on considère l'application φ de l'intervalle *I* d'extrémités –*x* et –3*x*, à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$u\mapsto t=\varphi(u)=-u$; cette application est de classe C^1 sur *I* et

$$f(-x)=\int_{-x}^{-3x}\frac{\cos t}{t}\,dt=\int_x^{3x}\frac{\cos(-u)}{-u}(-du)=\int_x^{3x}\frac{\cos u}{u}\,du=f(x)$$

donc la fonction *f* est paire sur *D*.

2. La fonction $t\mapsto\frac{\cos t}{t}$ est continue sur]0, +∞[, donc la fonction *g* est définie sur]0, +∞[et *g* est la primitive de $t\mapsto\frac{\cos t}{t}$ qui s'annule en 1. Il en résulte que, pour tout réel *x* strictement positif, $g'(x)=\frac{\cos x}{x}$.

3. Pour tout réel *x* strictement positif,

$$f(x)=\int_1^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt-\int_1^{x}\frac{\cos t}{t}\,dt=g(3x)-g(x)$$

et pour tout réel *x* strictement négatif,

$$f(x)=f(-x)=g(-3x)-g(-x)$$

4. Pour tout réel *x* strictement positif,

$$f'(x)=3g'(3x)-g'(x)=\frac{3\cos 3x}{3x}-\frac{\cos x}{x}=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x}$$

et pour tout réel *x* strictement négatif,

$$f'(x)=-3g'(-3x)+g'(-x)=\frac{-3\cos(-3x)}{-3x}+\frac{\cos(-x)}{-x}$$

Finalement, pour tout réel *x* non nul,

$$f'(x)=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x}$$

5. Soit *x* un réel strictement positif et *I* l'intervalle d'extrémités *x* et 3*x* : on pose

$u(t)=\sin t \qquad u'(t)=\cos t$

$v(t)=\frac{1}{t} \qquad v'(t)=-\frac{1}{t^2}$

Les deux fonctions sont de classe C^1 sur *I*. On a :

$$f(x)=\left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt=\frac{\sin(3x)}{3x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

On a

$$\left|\frac{\sin(3x)}{3x}\right|\le\frac{1}{3x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0 \qquad \left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

et d'autre part :

$$\left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\right|\le\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt\le\int_x^{3x}\frac{dt}{t^2}=\left[\left(-\frac{1}{3x}\right)-\left(-\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{2}{3x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

6. La fonction $t\mapsto\frac{1-\cos t}{t}$ est continue sur tout segment inclus dans]–∞, 0[et dans]0, +∞[; elle est prolongeable par continuité en 0 car $1-\cos t\underset{t\to0}{\sim}\frac{t^2}{2}$ et donc $\frac{1-\cos t}{t}\underset{t\to0}{\sim}\frac{t}{2}\xrightarrow[t\to0]{}0$. Soit *h* la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases}h(t)=\dfrac{1-\cos t}{t} & \text{si } t\neq 0\\ h(0)=0\end{cases}$$

Alors *h* admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et si *H* désigne l'une d'entre elle, on a :

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt=\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}h(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\left[H(3x)-H(x)\right]$$

la continuité de H en 0 implique que $\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt=0$ (1).

Or on a

$$f(x)=\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt-\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt=[\ln t]_x^{3x}-\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt$$

$$f(x)=(\ln 3x-\ln x)-\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt=\ln 3-\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt$$

En utilisant (1), on en déduit que $\lim_{x\to 0}f(x)=\ln 3$.

7. La fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=\ln 3 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et, d'après la question 4, pour tout réel x non nul,

$$f'(x)=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x}=\frac{\cos(3x)-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x}$$

On a

$$\frac{\cos(3x)-1}{x}\sim\frac{(3x)^2}{2x}=\frac{9x}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}0 \quad \text{et} \quad \frac{\cos(x)-1}{x}\sim\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

Donc f' admet une limite en 0 égale à 0 ; d'après le théorème du prolongement de la dérivée, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Vous savez tout sur les primitives ? Alors vous n'aurez aucun mal à répondre correctement aux trois questions suivantes.

Exercice 7 (★)

Pour les fonctions suivantes, dire, si oui ou non, elles admettent des primitives qui s'annule en 0 ; dans l'affirmative, la calculer.

1. $f(x)=|x|$

2. $f(x)=\lfloor x\rfloor$ *(partie entière)*

3. $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } -1\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Corrigé de l'exercice 7

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$ est continue et par suite admet des primitives ; on trouve immédiatement une primitive F de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

Il en résulte que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{1}{2}x|x|$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0.

2. Si la fonction partie entière admettait une primitive G sur un intervalle de la forme $[0, X]$ où $X > 1$, alors, par définition d'une primitive, G serait dérivable en 1 ; or la dérivée de G à gauche en 1 est 0 et sa dérivée à droite est 1; elle n'admet donc pas de primitive sur ces intervalles et par suite elle n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. Il est assez évident que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; d'abord sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ où elle est nulle, puis sur $]-1,1[$ où elle est polynomiale, enfin en –1 et en 1 où elle est de limite nulle. Cette fonction admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F celle qui s'annule en 0 ; il existe a, b et c réels tels que

$$F(x)=\begin{cases}a & \text{si } x\le -1\\ b+x-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } -1\le x\le 1\\ c & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

On doit avoir $F(0) = 0$ et par suite $b = 0$; la continuité de F en –1 implique que $a=-\frac{3}{2}$

et la continuité de F en 1 implique que $c=\frac{1}{2}$; donc

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2} & \text{si } x\le -1\\ x-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } -1\le x\le 1\\ \frac{1}{2} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Suites de fonctions

Le but de cet exercice est de montrer qu'étant donné une suite de fonctions (F_n) définie sur $[1,+\infty[$ *telle que, pour chaque x de l'ensemble de définition,* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ *existe, et pour chaque entier naturel n non nul,* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ *existe, alors, on n'a pas en général,*

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} F_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$$

Exercice 8 (💣)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la suite de fonctions définies sur $[1,+\infty[$ *par*

$$f_n(x)=\lambda_n\frac{(\ln x)^n}{x^3}$$

1 *Montrer qu'il existe une valeur de λ_n qu'on précisera telle que*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f_n(t)\,dt=1$$

2 *Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Pour la valeur de λ_n trouvée précédemment, déterminer*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^x f_n(t)\,dt$$

3 *Conclure*

Corrigé de l'exercice 8

1 Soit x un réel fixé supérieur ou égal à 1 et n un entier naturel non nul. Posons

$I_n(x)=\int_1^x\frac{(\ln t)^n}{t^3}dt$ et faisons une intégration par parties ; on pose

$$u(t)=-\frac{1}{2t^2}\qquad u'(t)=\frac{1}{t^3}$$

$$v(t)=(\ln t)^n\qquad v'(t)=n\frac{(\ln t)^{n-1}}{t}$$

les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$ et :

$$I_n(x)=\left[-\frac{1}{2t^2}(\ln t)^n\right]_1^x+\frac{n}{2}\int_1^x\frac{(\ln t)^{n-1}}{t^3}dt=\left[-\frac{1}{2t^2}(\ln t)^n\right]_1^x+\frac{n}{2}I_{n-1}(x)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2t^2}(\ln t)^n\right]_1^x=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}(\ln x)^n+\frac{1}{2}(\ln 1)^n\right]=0$$

Notons I_n la limite quand x tend vers $+\infty$ de $I_n(x)$. Il reste que $I_n=\frac{n}{2}I_{n-1}$ (*) ; non , il ne s'agit pas d'une suite géométrique de raison $\frac{n}{2}$. La raison d'une suite géométrique (ou arithmétique) est une constante, c'est-à-dire un réel indépendant de la variable baptisée dans cet exercice n. Pour déterminer I_n nous allons procéder « par cascade » et démontrer le résultat par récurrence.

$$I_2=\frac{2}{2}I_1$$

$$I_3=\frac{3}{2}I_2$$

$$I_4=\frac{4}{2}I_3$$

…

$$I_n=\frac{n}{2}I_{n-1}$$

Pour conjecturer la réponse, on peut multiplier membre à membre et simplifier (apprécier la rigueur !) ; on obtient :

$$I_n=\frac{2\times3\times\cdots\times n}{2^{n-1}}I_1=\frac{n!}{2^{n-1}}I_1$$

L'exposant de 2 provient du fait qu'il y a $n-1$ lignes dans l'écriture ci-jointe.
Ce petit bricolage est destiné à nous fournir la formule que nous allons maintenant démontrer.

Initialisation : La proposition est vraie pour $n = 1$ car $I_1=\frac{1!}{2^{1-1}}I_1$.

Hypothèse de récurrence : On suppose que pour un entier n quelconque fixé supérieur ou égal à 1,

$$I_n=\frac{n!}{2^{n-1}}I_1\qquad\text{(HR)}$$

Hérédité : On doit en déduire que $I_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} I_1$

On a $I_n = \frac{n!}{2^{n-1}} I_1$ (HR) et $I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n$ d'après (*). On a immédiatement

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n!}{2^{n-1}} I_1 = \frac{(n+1)!}{2^n} I_1$$

Conclusion : Quel que soit l'entier naturel n non nul, $I_n = \frac{n!}{2^{n-1}} I_1$

Calculons maintenant I_1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

$$I_1(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$$

Faisons une intégration par parties ; on pose

$$u(t) = -\frac{1}{2t^2} \qquad u'(t) = \frac{1}{t^3}$$

$$v(t) = \ln t \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$

les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$ et :

$$I_1(x) = \left[-\frac{1}{2t^2}\ln t\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t^3} dt = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\right]$$

On a $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} I_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$. Il en résulte que

$$I_n = \frac{n!}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{n!}{2^{n+1}}$$

On recherche le réel λ_n tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda_n \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt = 1$, c'est-à-dire $\lambda_n I_n = 1$; on en déduit que

$$\lambda_n = \frac{1}{I_n} = \frac{2^{n+1}}{n!}$$

2 Soit x un réel supérieur ou égal à 1. On se propose de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\lambda_n \cdot I_n(x)\right]$.

Inutile de reprendre les calculs ci-dessus et espérer une simplification. L'expression de $I_n(x)$ est obtenue en fonction de $I_{n-1}(x)$; il n'y a rien à faire de ce coté là.
Procédons alors par encadrement : pour tout x supérieur ou égal à 1,

$$1 \le t \le x \Rightarrow 0 \le \frac{(\ln t)^n}{t^3} \le \frac{(\ln t)^n}{t}$$

En intégrant

$$0 \le \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt \le \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t} dt \quad \text{donc} \quad 0 \le \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt \le \left[\frac{1}{n+1}(\ln t)^{n+1}\right]_1^x$$

Et par suite,

$$0 \le \lambda_n \cdot I_n(x) \le \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow 0 \le \lambda_n \cdot I_n(x) \le \frac{(2\ln x)^{n+1}}{n+1!}$$

Mais quelle est donc la limite de la suite $\left(\frac{(2\ln x)^n}{n!}\right)$? Alors, vous y êtes ? Oui, bien sûr,

$\sum \frac{(2\ln x)^n}{n!}$ est une série convergente de somme $e^{2\ln x} = x^2$; donc son terme général tend vers 0. et d'après un célèbre théorème de gendarmerie, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\lambda_n \cdot I_n(x)\right] = 0$

3 Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par

$$F_n(x) = \frac{2^{n+1}}{n!}\int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} F_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

et aussi :

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} F_n(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) \ne \lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$

Fonctions numériques de plusieurs variables

Cet exercice prend le cours à contre-pied ; celui-ci nous dit que les fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ admettent un développement limité (DL) en chaque point de U ; ici, on ne cherche pas si les fonctions proposées sont de classe C^1 sur un voisinage ouvert d'un point $\vec{a}$ de U mais si elles ont un développement limité en ce point.

On dit que f a un développement limité en un point $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ où f est définie, si:

- f admet des dérivées partielles en $\vec{a}$

- Il existe une fonction ε définie sur un voisinage de $\vec{0}$, de limite nulle en $\vec{0}$, telle que pour tout $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ de ce voisinage où $\vec{a} + \vec{h} \in U$,

$$f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + d_{\vec{a}}\, f(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\,\varepsilon(\vec{h})$$

avec

$$d_{\vec{a}}\, f(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})\, h_i$$

Exercice 9 (💣)

Soit m un réel strictement positif; on veut étudier la continuité et l'existence des dérivées partielles de la fonction f_m définie par:

$$\begin{cases} f_m(x,y) = \dfrac{|xy|^m}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f_m(0,0) = 0 \end{cases}$$

* *Questions préliminaires*

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(1) $\quad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 - xy + y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$

(2) $\quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2$

1ère partie

* *Etude de f_1*

1. ***Continuité de f_1***
   a) *Montrer que f_1 est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de (0, 0)*
   b) *Calculer $f_1(x, x)$; que peut-on déduire sur la continuité de f_1 en (0, 0)*
2. ***Existence et continuité des dérivées partielles de f_1***
   a) *Montrer que f_1 est de classe C^1 sur l'ensemble ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$*
   b) *Montrer que f_1 a des dérivées partielles en (0, 0)*
   c) *En utilisant la même méthode qu'en 1 b), montrer que f_1 n'admet pas de DL d'ordre 1 en (0, 0).*
   d) *Soit $x_0 \neq 0$; calculer les dérivées partielles de f_1 aux points $(x_0, 0)$; que peut-on en déduire?*
   Calculer de même les dérivées partielles de f_1 en $(0, y_0)$ où y_0 est différent de 0; que peut-on en déduire?

2ème partie

* *Etude de f_2*

1. ***Continuité de f_2***
   a) *Montrer que f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de (0, 0)*
   b) *Montrer que f_2 est continue en (0, 0)*
2. ***Dérivée partielle et développement limité de f_2***
   a) *Montrer que f_2 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ privé de (0, 0).*
   b) *Montrer que f_2 a des dérivées partielles en (0, 0).*
   c) *Montrer que f_2 admet un DL d'ordre 1 en (0,0).*

3ème partie

* *Etude de f_m*

1. ***Continuité de f_m***
   a) *Montrer que f_m est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de (0, 0) et que pour tout réel m > 1, f_m est continue en (0, 0)*
   b) *Calculer $f_m(x, x)$; que peut-on déduire sur la continuité de f_m en (0, 0) pour $m \leq 1$*
2. ***Dérivée partielle et développement limité de f_m***
   a) *Montrer que f_m est de classe C^1 sur l'ensemble ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$*
   b) *Montrer que f_m a des dérivées partielles en (0, 0) et que, si $m > \frac{3}{2}$, alors f_m admet un développement limité d'ordre 1 en (0, 0).*
   c) *Montrer que f_m n'admet pas de DL d'ordre 1 en 0 si $m \leq \frac{3}{2}$; conclure*
   d) *Soit $x_0 \neq 0$; calculer les dérivées partielles, si elles existent, au point $(x_0, 0)$. Montrer que pour m > 1, $|f_m(x, y) - f_m(x_0, 0)|$ est négligeable devant la norme euclidienne de $(x - x_0, y)$. Dans le cas où m > 1, étudier l'existence d'un développement limité de f_m aux points $(x_0, 0)$ et $(0, y_0)$ où x_0 et y_0 sont différents de 0. Que peut-on dire de l'existence des dérivées partielles et d'un développement limité de f_m en $(x_0, 0)$ et $(0, y_0)$ où x_0 et y_0 sont différents de 0, dans le cas où $m \leq 1$?*

Corrigé de l'exercice 9

Questions préliminaires

Regroupons les questions et traitons sans plus attendre la continuité de f_m sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles de f_m sur $\{(x, y) / xy \neq 0\}$ et le calcul des dérivées partielles en (0, 0)

* **Continuité de f_m sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$**

La fonction f_m définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est une *formule*[1] de fonctions continues, donc f_m est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

* **Développement limité de f_m en tout point de $\{(x, y) / xy \neq 0\}$**

La fonction f_m définie sur $\{(x, y) / xy \neq 0\}$ est une *formule* de fonctions de classe C^1, donc f_m est de classe C^1 sur $\{(x, y) / xy \neq 0\}$.

* **Dérivées partielles de f_m en (0, 0)**

On a:

$$\frac{f_m(h,0) - f_m(0,0)}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f_m(0,k) - f_m(0,0)}{k} = 0$$

On en déduit que f_m a des dérivées partielles nulles en (0, 0)

Rappelons que l'existence des dérivées partielles d'une f en un point, n'implique pas sa continuité en ce point.

Les deux relations données sont à connaître ; pour montrer que :

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le x^2 - xy + y^2 \le \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$$

On va montrer que $x^2 + y^2 \le 2x^2 - 2xy + 2y^2 \le 3x^2 + 3y^2$

C'est une conséquence immédiate des relations

$$0 \le x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - \left(x^2 + y^2\right)$$

et

$$0 \le x^2 + 2xy + y^2 = 3x^2 + 3y^2 - \left(2x^2 - 2xy + 2y^2\right)$$

Pour montrer que

$$(2) \qquad |xy| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le x^2 + y^2$$

on va montrer que $2|x||y| \le x^2 + y^2 \le 2\left(x^2 + y^2\right)$. Là encore, c'est une conséquence immédiate de :

$$0 \le (|x| - |y|)^2 \le x^2 + y^2 - 2|x||y|$$

et de

$$0 \le x^2 + y^2 = 2\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)$$

1ère partie

[1] D'éminents confrères disent aussi : « un cocktail » de fonctions continues. Il faut voir en cela une façon d'écourter une démonstration aussi fastidieuse qu'évidente et que nous laissons le soin au lecteur de rédiger.

* Etude de f_1

1. Continuité

a) On a vu que f_1 est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b) On a $f_1(x, x) = 1$; donc f_1 ne peut pas être de limite nulle en (0, 0) et par suite f_1 n'est pas continue en (0, 0).

2. Dérivées partielles et développement limité de f_1 en (0, 0)

a) On a vu que f_1 admet des dérivées partielles continues sur $\{(x, y) / xy \neq 0\}$.

b) On a vu que f_1 a des dérivées partielles nulles en (0, 0)

c) f_1 a un DL d'ordre 1 en (0, 0) si, et seulement si, il existe une fonction ε définie sur un voisinage de (0, 0) telle que $f_1(h, k) = \|(h, k)\| \, \varepsilon(h, k)$ avec $\lim \varepsilon(h, k) = 0$ quand (h, k) tend vers (0, 0). Or

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f_1(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{|hk|}{(h^2 - hk + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Pour $h = k$, on obtient:

$$\varepsilon(h,h) = \frac{1}{|h|\sqrt{2}}$$

On a $\varepsilon(h, h) \ge 1$ dès que $|h| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$; il en résulte que ε n'est pas une fonction de limite 0 en (0, 0) et donc f_1 n'a pas de DL d'ordre 1 en (0, 0).

d) Soit x_0 un réel non nul. Calculons les dérivées partielles, si elles existent, de f_1 en $(x_0, 0)$; on a:

$$\frac{f_1(x_0 + h, 0) - f_1(x_0, 0)}{h} = 0$$

donc $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, 0) = 0$. De même,

$$\frac{f_1(x_0, k) - f_1(x_0, 0)}{k} = \frac{|k|}{k} \frac{|x_0|}{x_0^2 - x_0 k + k^2}$$

Quand k tend vers 0 par valeur supérieure à 0, le rapport tend vers $1/|x_0|$ et vers son opposé quand k tend vers 0 par valeur inférieure à 0. Ce rapport n'étant jamais nul ($\forall x_0 \in \mathbb{R}^*$), il en résulte que f_1 n'a pas de dérivées partielles par rapport à y en $(x_0, 0)$.Comme, de plus, x et y jouent le même rôle, il en résulte que f_1 n'a un DL en aucun point de l'ensemble $\{(x, y) / xy = 0\}$

2ème partie

1. Continuité

a) On a vu que f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b) On a

$$f_2(x, y) = \frac{(xy)^2}{x^2 - xy + y^2}$$

$$0 \le f_2(x, y) \le 2\frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2}$$

$0 \le f_2(x, y) \le 2(x^2 + y^2)$; donc f_2 tend vers 0 en (0, 0) et par suite f_2 est continue en (0, 0).

2. Dérivées partielles et développement limité de f_2.

a) On a vu que f_2 admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

b) On a vu qu'elle a des dérivées partielles nulles en (0, 0)

c) f_2 a un DL d'ordre 1 en (0, 0) si, et seulement si, il existe une fonction ε définie sur un voisinage de (0, 0) telle que $f_1(h, k) = \|(h, k)\|\ \varepsilon(h, k)$ avec $\lim \varepsilon(h, k) = 0$ quand (h, k) tend vers (0, 0). Or

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f_2(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{(hk)^2}{(h^2 - hk + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

On a :

$$0 \le \varepsilon(h, k) \le 2\frac{(h^2 + k^2)^2}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

et donc $0 \le \varepsilon(h, k) \le 2\sqrt{h^2 + k^2}$

ε est une fonction de limite 0 en (0, 0) et donc f_2 a un DL d'ordre 1 en (0, 0).

3ème partie

* Etude de f_m

1. Continuité de f_m

a) On a vu que f_m est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

On a

$$f_m(x, y) = \frac{|xy|^m}{x^2 - xy + y^2}$$

Par suite,

$$0 \le f_m(x, y) \le 2\frac{(x^2 + y^2)^m}{x^2 + y^2}$$

Ainsi, $0 \le f_m(x, y) \le 2(x^2 + y^2)^{m-1}$; pour $m > 1$, f_m tend vers 0 en (0, 0) et par suite f_m est continue en (0, 0).

b) On a $f_m(x, x) = x^{2m-2}$ qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0 et $m \le 1$; donc f_m n'est pas continue en (0, 0).

2. Dérivée partielle et développement limité.

a) On a vu que f_m admet un développement limité en tout point de $\{(x, y) / xy \ne 0\}$

b) On a vu qu'elle a des dérivées partielles nulles en (0, 0)

f_m a un DL d'ordre 1 en (0, 0) si, et seulement si, il existe une fonction ε définie sur un voisinage de (0, 0) telle que $f_m(h, k) = \|(h, k)\|\ \varepsilon(h, k)$ avec $\lim \varepsilon(h, k) = 0$ quand (h, k) tend vers (0, 0). Or

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f_m(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{|hk|^m}{(h^2 - hk + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

On a :

$$0 \le \varepsilon(h, k) \le 2\frac{(h^2 + k^2)^m}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Ainsi, $0 \le \varepsilon(h, k) \le 2(h^2 + k^2)^{m-\frac{3}{2}}$

Pour $m > 3/2$, ε est une fonction de limite 0 en (0, 0) et donc f_m a un DL d'ordre 1 en (0, 0).

c) Pour $m \le 3/2$, on a:

$$\varepsilon(h, h) = \frac{f_m(h,h)}{|h|\sqrt{2}} = \frac{h^{2m}}{|h|^3\sqrt{2}}$$

Soit

$$\varepsilon(h, h) = \frac{f_m(h,h)}{|h|\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|h|^{2m-3}$$

$\varepsilon(h, h)$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0; donc f_m n'a pas de DL d'ordre 1 en (0, 0) pour $m \le 3/2$

d) Calcul des dérivées partielles, si elles existent, en $(x_0, 0)$; on a:

$$\frac{f_m(x_0 + h, 0) - f_m(x_0, 0)}{h} = 0$$

donc $\dfrac{\partial f_m}{\partial x}(x_0, 0) = 0$

De même,

$$\frac{f_m(x_0, k) - f_m(x_0, 0)}{k} = |k|^{m-1}\frac{|x_0|}{x_0^2 - x_0 k + k^2}$$

Pour $m \le 1$, le rapport n'a pas de limite lorsque k tend vers 0 et donc f_m n'a pas de développement limité en $(x_0, 0)$; pour des raisons semblables, elle n'en a pas non plus en $(0, y_0)$.

Pour $m > 1$, $\dfrac{\partial f_m}{\partial x}(x_0, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial f_m}{\partial y}(x_0, 0) = 0$

f_m aura un développement limité en $(x_0, 0)$ si, et seulement si:

$$f_m(x, y) - f_m(x_0, 0) = \|(x - x_0, y)\|\ \varepsilon(x - x_0, y)$$

On a clairement :

$$|\varepsilon(x - x_0, y)| = \left| \frac{f_m(x, y) - f_m(x_0, 0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} \right|$$

$$|\varepsilon(x - x_0, y)| = \frac{|xy|^m}{(x^2 - xy + y^2)\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}}$$

D'où :

$$|\varepsilon(x - x_0, y)| \leq \frac{|xy|^m}{(x^2 - xy + y^2)|y|}$$

Et donc :

$$|\varepsilon(x - x_0, y)| \leq \frac{|x|^m}{(x^2 - xy + y^2)}|y|^{m-1}$$

On a, pour $m > 1$, ε tend vers 0 en $(0, 0)$ et donc f_m admet un développement limité d'ordre 1 en $(x_0, 0)$. De même, x et y jouant le même rôle, f_m admet un développement limité d'ordre 1 en $(0, y_0)$.

Algèbre linéaire

Notes de cours et compléments

Base canonique de $\mathbb{R}^3$:

Par définition, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $C = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$

Application linéaire : comment montrer qu'une application est une application linéaire

On utilise la définition : f est linéaire si

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\quad f(\alpha \cdot \vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

Pour montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on montre la linéarité et on montre que

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\quad f(\vec{u}) \in \mathbb{R}^3$$

Matrice d'une application linéaire :

Deux cas se présentent :

<u>Ou bien</u> f est définie par une formule donnant l'image de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Rightarrow f(\vec{u}) = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$$

avec :

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

Alors la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

<u>Ou bien</u> f est définie par les images de ses vecteurs de base :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 \end{cases}$$

Alors la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Changement de base ; comment montrer qu'une famille de vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$?

Pour montrer que la famille $(\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,')$ définie par

$$\begin{cases} \vec{e}_1\,' = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\,' = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\,' = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 \end{cases}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la matrice de $(\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,')$ est une famille libre ; ce qui revient à montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

est inversible. La matrice P est appelée **matrice de passage** de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$.

Changement de base ; matrice semblable

Si P désigne la matrice de passage de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, alors :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{u} = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3'$$

On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice A dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, alors la matrice A' de f dans la base $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ est donnée par $A' = P^{-1}AP$. On a aussi $A = PA'P^{-1}$.

Si A et B sont deux matrices telles qu'il existe une matrice P vérifiant $B = P^{-1}AP$ alors les matrices A et B sont dites semblables.

Exercice 10 (★★)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2y + z,\ x + z,\ y - 2z)$$

1. *Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice A de f dans la base canonique C.*
   Préciser les images de chacun des vecteurs de la base canonique (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1).
2. *Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ définie par*

   $$\vec{e}_1 = (1,1,0), \qquad \vec{e}_2 = (0,1,1), \qquad \vec{e}_3 = (1,0,1)$$

   est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage P de C à $\mathcal{B}$ puis la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Corrigé de l'exercice 10

1. Soit (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés dans la base canonique et α un réel.

   $$f(\alpha(x, y, z) + (x', y', z')) = f((\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z'))$$

   $$= ((\alpha x + x') - 2(\alpha y + y') + (\alpha z + z'), (\alpha x + x') + (\alpha z + z'), (\alpha y + y') - 2(\alpha z + z'))$$
   $$= \alpha(x - 2y + z,\ x + z,\ y - 2z) + (x' - 2y' + z',\ x' + z',\ y' - 2z')$$

   D'où la linéarité. Par ailleurs, l'image de tout élément de $\mathbb{R}^3$ est un élément de $\mathbb{R}^3$; donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et sa matrice dans la base canonique est :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Les vecteurs colonnes de A sont dans l'ordre, les matrices des images des vecteurs de la base canonique ; ainsi :

   $$f((1,0,0)) = (1,1,0), \quad f((0,1,0)) = (-2,0,1), \quad f((0,0,1)) = (1,1,-2)$$

2. Montrons que la matrice de la famille de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est inversible :

   $$M_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Posons le système et montrons qu'il se réduit à un système de Cramer

   $$\begin{cases} x \quad + z = a & L_1 \\ x + y \quad = b & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad y + z = c & L_3 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} x \quad + z = a & L_1 \\ \quad y - z = -a + b & L_2 \\ \quad y + z = c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \quad + z = a \\ y - z = -a + b \\ 2z = a - b + c \end{cases}$$

Le système obtenu se réduit à un système triangulaire, sans 0 sur la diagonale, donc la matrice $M_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$ est inversible et la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Il s'ensuit que la matrice de passage P de la base canonique à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer son inverse, il nous faut exprimer, dans le système précédent, x, y et z en fonction de a, b, c ; on notera que la moitié du travail est déjà fait :

$$\begin{cases} x \quad + z = a & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ y - z = -a + b & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ 2z = a - b + c & L_3 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} 2x = a + b - c \\ 2y = -a + b + c \\ 2z = a - b + c \end{cases}$$

La matrice inverse de P est donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la matrice A' donnée par $A' = P^{-1}AP$; on a alors

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Valeur propre nulle :
Si A a une valeur propre égale à 0, alors A n'est pas inversible et l'endomorphisme associé n'est pas bijectif.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau de f et sa dimension est supérieur ou égal à 1.
Rang d'une matrice
Etant donné une matrice A, le rang de A est le nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendant.
Le rang de A est nul si, et seulement si, il n'y a aucun vecteur formant une famille libre ; donc toutes les colonnes sont nulles et la matrice est nulle.
Le rang de A est égal à 1 si, et seulement si, il y a au moins une colonne non nulle et toutes les colonnes sont des matrices de vecteurs colinéaires, c'est-à-dire :

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad Y = \alpha X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

Dans tous les autres cas le rang de la matrice est supérieur ou égal à 2. Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les première, deuxième, troisième et cinquième colonnes sont des matrices de vecteurs colinéaires ; pas la quatrième. Donc le rang de A est 2.
Produit de deux matrices et image de vecteurs par une application linéaire :
Donnons-nous une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

On suppose la base canonique ; alors A est la matrice d'une famille de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$.
Le produit de cette matrice par une matrice unicolonne, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 1 colonne, donne la combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ affectés des coefficients de la matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

est la matrice dans la base canonique, du vecteur $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$.
Considérons, maintenant, le produit de deux matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

La première colonne de la matrice produit, est la matrice de la combinaison linéaire $x_1 \cdot \vec{u} + x_2 \cdot \vec{v} + x_3 \cdot \vec{w}$, la seconde colonne est celle de la combinaison linéaire $y_1 \cdot \vec{u} + y_2 \cdot \vec{v} + y_3 \cdot \vec{w}$ et la troisième colonne, celle de la combinaison linéaire $z_1 \cdot \vec{u} + z_2 \cdot \vec{v} + z_3 \cdot \vec{w}$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit, que si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'un endomorphisme f dans la base canonique, alors le vecteur (-1, -1, 2) a pour image le vecteur nul, donc que le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul, et donc que l'application f n'est pas injective.
On remarque aussi que la troisième colonne de la matrice produit est deux fois le vecteur (0, 0, 1) ; il s'ensuit que le vecteur (0, 0, 1) est un vecteur de l'image de f et qu'il est l'image du vecteur $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.
On remarque enfin que le vecteur (2, 2, 2) est l'image du vecteur (1, 0, 1) par f ; ainsi le vecteur (1, 1, 1) est aussi un vecteur de l'image de f.
On vérifie facilement que les deux vecteurs (0, 0, 1) et (1, 1, 1) forment une famille libre ; comme ils sont des éléments de l'image de f ; on en déduit que l'image de f est de dimension supérieure ou égale à 2. Le noyau est de dimension supérieure ou égale à 1 puisqu'il contient au moins un vecteur non nul ; par le théorème du rang, on en déduit que le noyau et l'image de f sont de dimensions respectives 1 et 2.
Trace d'une matrice et valeurs propres :
L'ensemble de tous les vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est un sous-espace vectoriel de R^3 contenant le vecteur nul et tous les vecteurs associés à la valeur propre λ. On l'appelle « espace propre associé à la valeur propre λ » ; on le note souvent E_λ.
La somme des valeurs propres distinctes, pondérées par la dimension de l'espace propre associé, c'est-à-dire

$$\sum_{\lambda \in sp(A)} \lambda \cdot \dim E_\lambda$$

est égale à la trace de la matrice, c'est-à-dire la somme des éléments de la diagonale ; par exemple, soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si cette matrice a des valeurs propres, alors leur somme est égale à 1 + 1 + 0 = 2.
On admettra que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre 3, alors tr(AB) = tr(BA) où tr désigne la trace de la matrice. Il s'ensuit que deux matrices semblables ont la même trace.
Valeurs propres des matrices A et A^2.
Si λ est une valeur propre d'une matrice A, alors λ^2 est une valeur propre de A^2 car $A - \lambda I$ non inversible implique $(A - \lambda I)(A + \lambda I)$ non inversible et donc $A^2 - \lambda^2 I$ non inversible.
Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable car si A est semblable à une matrice diagonale D, alors A^2 est semblable à la matrice diagonale D^2. Dans ce cas toutes les valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A.
Si A^2 a une valeur propre strictement positive λ alors A a pour valeur propre au moins un des deux nombres $\sqrt{\lambda}$, $-\sqrt{\lambda}$, car si les matrices $A - \sqrt{\lambda} I$ et $A + \sqrt{\lambda} I$ étaient toutes deux non inversibles, il en serait de même de $A^2 - \lambda I$.
Si 0 est valeur propre de A^2, alors 0 est valeur propre de A sinon, A serait inversible et A^2 aussi.
En revanche, A^2 peut être diagonalisable sans que A le soit.
A^2 peut avoir des valeurs propres négatives.

Exercice 11 (💣)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Donner les images des vecteurs de la base canonique C (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1), ainsi que l'image du vecteur (x, y, z) où x, y et z sont trois réels donnés.*
2. *Calculer la matrice A^2 ; en déduire que 2 est valeur propre de A.*
3. *Montrer que si A est diagonalisable et si A a trois valeurs propres λ_1, λ_2 et 2, alors*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 \end{cases}$$

En déduire l'ensemble des valeurs propres de f. L'application f est-elle bijective ? La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice A' diagonale, semblable à A.

Corrigé de l'exercice 11

1. La matrice A est la matrice de f dans la base canonique ; il s'ensuit que les vecteurs colonnes, considérés comme vecteurs de $\mathbb{R}^3$, sont, dans l'ordre, les matrices des images des vecteurs de la base canonique ; ainsi,

$$f\big((1,0,0)\big) = (1,-1,2), \quad f\big((0,1,0)\big) = (1,0,1), \quad f\big((0,0,1)\big) = (1,1,0)$$

Soit maintenant, un vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$. Son image par f est donnée par sa matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+z \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

On a donc $f\big((x, y, z)\big) = (x+y+z, -x+z, 2x+y)$.

2. Un calcul immédiat nous donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que l'image du vecteur (1, 0, 1) par f est le vecteur (2, 0, 2), c'est-à-dire 2 fois le vecteur (1, 0, 1). Il en résulte que 2 est une valeur propre de f (ou de A) et que (1, 0, 1) en est un vecteur propre.

3. Si A est diagonalisable et a 3 valeurs propres λ_1, λ_2 et 2, alors A^2 a 3 valeurs propres λ_1^2, λ_2^2 et 4, car

$$\lambda \text{ vp de } A \Leftrightarrow \exists X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AX = 2X$$

implique

$$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

En utilisant la trace de A et la trace de A^2, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 = 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 4 = 5 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 \end{cases}$$

En élevant la première égalité au carré :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = 1 \quad \text{et donc} \quad 2\lambda_1\lambda_2 = 0$$

par suite on obtient les deux autres valeurs propres possibles de A : 0 et –1.
Ainsi, si A est diagonalisable, l'ensemble des valeurs propres est {0, 1, 2}. On constate que la somme de la première et de la troisième colonne de A donne deux fois la seconde colonne de A ; on en déduit que A n'est pas de rang 3 et donc 0 est valeur propre de A.
Enfin

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières colonnes de $A + I$ étant identique, il est clair que cette matrice est non inversible et donc que –1 est aussi valeur propre de A.
On peut donc conclure que l'ensemble des valeurs propres de A est {0, –1, 2}.
0 est valeur propre de A (ou de f) donc f n'est pas injective, donc pas bijective (et donc A n'est pas inversible).
A a trois valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 ; donc A est diagonalisable et, dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est A' définie par :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices A et A' sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases de $\mathbb{R}^3$, donc elles sont semblables.

Probabilités

Exercice 12 (★)

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le

n°k alors, avant de procéder au tirage suivant, on retire de l'urne toutes les boules de n° supérieur ou égal à k.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules.

Préliminaire
Soit a un nombre réel et (s_n) la suite définie par

$$\begin{cases} s_1 \text{ fixé} \\ \forall n \geq 2, \quad s_n = \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}) + a \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tout $n \geq 2$, $s_{n+1} = s_n + \frac{a}{n+1}$*
2. *Pour quelle valeur de a la suite (s_n) est-elle stationnaire ?*

Partie A
1. *Donner la loi de X_1, la loi de X_2 ainsi que leurs espérances.*
2. *Déterminer la loi de X_3 ainsi que son espérance.*
3. *Déterminer la loi de X_4 ainsi que son espérance.*

Partie B
On étudie désormais le cas général.
1. *Calculer les probabilités des événements $(X_n = 1)$ et $(X_n = n)$.*
2. *On désigne par N_1 la variable aléatoire égal au n° de la première boule tirée.*
   a. *Reconnaître la loi de N_1.*
   b. *Vérifier que :*

$$\forall i, k \in \{2, \cdots, n\}, \ p(X_n = k \,/\, N_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k-1 \\ p(X_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

   c. *Montrer que :*

$$\forall k \in \{2, \cdots, n\}, \ p(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-1}^{n-1} p(X_i = k-1)$$

3. *Calculer la probabilité de $(X_n = 2)$.*
4. *Pour $n \geq 2$, on pose :* $v_n = n!\, p(X_n = n-1)$.
   a. *Etablir que :* $\forall n \geq 2, \ v_{n+1} = v_n + n$
   b. *En déduire la probabilité de l'événement $(X_n = n - 1)$.*

Partie C
1. *Montrer que :*

$$\forall n \geq 2, \quad E(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1$$

2. *En déduire que :*

$$\forall n \geq 2, \quad E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

3. *Montrer que :*

$$\forall n \geq 1, \ E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Déterminer un équivalent de $E(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 12

Préliminaire

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} + s_n) - \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1})$$

Soit

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} s_n + (s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1})\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

Or $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$, on en déduit donc

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1}\left[s_n - \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1})\right] = \frac{1}{n+1} \cdot a$$

D'où l'expression : $\forall n \geq 2, \quad s_{n+1} = s_n + \frac{a}{n+1}$

2. Pour que la suite (s_n) soit stationnaire, il faut que deux termes consécutifs de la suite soit égaux. Or la relation $s_{n+1} = s_n$ implique $a = 0$. Réciproquement, si $a = 0$, pour tout n supérieur ou égal à 2, $s_{n+1} = s_n$ et donc (s_n) est stationnaire.

Partie A

1. X_1 est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider une urne ne contenant qu'une seule boule (de n°1) de son contenu. C'est clair, l'urne est vide au premier et seul tirage. Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $p(X_1 = 1) = 1$, $E(X_1) = 1$.

   X_2 est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider une urne ne contenant que deux boules (n°1 et n°2) de son contenu. L'urne peut est vide après le premier tirage si l'on tire le n°1 ; toutefois, si on tire le n°2, on supprime de l'urne la boule n°2 et on procède à un nouveau tirage dans l'urne ne contenant plus que la boule n°1. Ainsi, $X_2(\Omega)=\{1, 2\}$ et on a les résultats suivants :

k	1	2	Σ
$p(X_2=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$k\cdot p(X_2=k)$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

2. X_3 est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider une urne ne contenant que deux boules (n°1, 2 et n°3) de son contenu. L'urne peut est vide après le premier tirage si l'on tire le n°1 ; toutefois, si on tire le n°2, on supprime de l'urne les boules n°2 et n°3, puis on procède à un nouveau tirage dans l'urne ne contenant plus que la boule n°1. Enfin, si on tire la boule n°3, alors, pour le tirage suivant, on est ramené à un tirage dans une urne contenant les boules n°1 et 2. Désignons par N_k le n° de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée. On a $X_3(\Omega)=\{1, 2, 3\}$ et on obtient les résultats suivants :

$$p(X_3=1)=p(N_1=1)=\frac{1}{3}$$

$$p(X_3=3)=p(N_1=3\cap N_2=2\cap N_3=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}$$

On en déduit $p(X_3=2)$. Résumons

k	1	2	3	Σ
$p(X_3=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1
$k\cdot p(X_3=k)$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}$

3. X_4 est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider une urne ne contenant que quatre boules (n°1, 2, 3 et 4) de son contenu. L'urne peut est vide après le premier tirage si l'on tire le n°1 ; toutefois, si on tire le n°2, 3 ou 4 au premier tirage, puis le n°1 au deuxième, alors l'urne est vide en deux tirages. Elle peut être vide en trois tirages si on tire la boule n°1 au troisième tirage. Enfin, si on tire la boule n°4, puis, successivement les boules n°3, 2 et 1, alors l'urne est vide en 4 tirages. Désignons par N_k le n° de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée. On a $X_4(\Omega)=\{1,2,3,4\}$ et on obtient les résultats suivants :

$$p(X_4=1)=p(N_1=1)=\frac{1}{4}$$

$$p(X_4=2)=p[(N_1=2)\cap(N_2=1)]+p[(N_1=3)\cap(N_2=1)]+p[(N_1=4)\cap(N_2=1)]$$

$$p(X_4=2)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{24}$$

$$p(X_4=4)=p(N_1=4\cap N_2=3\cap N_3=2\cap N_4=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{24}$$

On en déduit $p(X_4=3)$. Résumons

k	1	2	3	4	Σ
$p(X_4=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	1
$k\cdot p(X_4=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{25}{12}$

Partie B

1. En utilisant la variable N_k égale au n° de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée, l'événement $(X_n=n)$ est équivalent à $(N_1=n)\cap(N_2=n-1)\cap\cdots\cap(N_n=1)$; on a donc

$$p(X_n=n)=p\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}(N_k=n-k+1)\right)=\frac{1}{n!}$$

et immédiatement,

$$p(X_n=1)=p(N_1=1)=\frac{1}{n}$$

2 a. Il est clair que N_1 suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \cdots, n\}$. Bien qu'elle ne soit pas demandée, $E(N_1)=\frac{n+1}{2}$

2 b. Soit $i,k\in\{2,3,\cdots,n\}$; l'événement $(X_n=k\ /\ N_1=i)$ est l'événement « vider l'urne contenant les boules n° 1, 2, …, $i-1$, en $k-1$ tirages. ».
Cet événement est impossible si $i-1<k-1$, c'est-à-dire si $i\leq k-1$, et dans ce cas $p(X_n=k\ /\ N_1=i)=0$.
Si $i-1\geq k-1$, c'est-à-dire si $i\geq k$, alors, après le premier tirage, l'urne contient les boules numérotées de 1 à $i-1$; donc on doit vider l'urne en $k-1$ tirages ; ainsi : $p(X_n=k\ /\ N_1=i)=p(X_{i-1}=k-1)$.
Et donc :

$$\forall i,\ k\in\{2,\cdots,n\},\ \ p(X_n=k\ /\ N_1=i)=\begin{cases}0 & \text{si } i\leq k-1\\ p(X_{i-1}=k-1) & \text{si } i\geq k\end{cases}$$

2 c. D'après la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'événements $(N_1=i)_{i\geq 1}$

$$\forall k\in\{2,\cdots,n\},\ \ p(X_n=k)=\sum_{i=1}^{n}p(X_n=k\ /\ N_1=i)\,p(N_1=i)$$

On utilise la relation obtenue dans la question précédente et $p(X_n=1)=p(N_1=1)=\frac{1}{n}$, d'où (1) :

$$\forall k \in \{2, \cdots, n\},\ p(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n} p(X_{i-1} = k-1) = \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} p(X_i = k-1)$$

3. En appliquant cette relation,

$$p(X_n = 2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} p(X_i = 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

4 a. Pour $n \geq 2$, $v_{n+1} = (n+1)!\,p(X_{n+1} = n)$, en utilisant (1) :

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n+1}\sum_{i=n-1}^{n}\left[p(X_i = n-1)\right] = n!\left[p(X_{n-1} = n-1) + p(X_n = n-1)\right]$$

puis, en développant :

$$v_{n+1} = n!\frac{1}{(n-1)!} + n!\,p(X_n = n-1) = n + v_n \qquad (2)$$

4 b. Pour $n \geq 2$, on déduit de la relation (2) :

$$\begin{cases} v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \cdots + (v_3 - v_2) + v_2 = v_2 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} k \\ v_2 = 2p(X_2 = 1) = 1 \end{cases}$$

Finalement

$$v_n = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{et donc} \quad p(X_n = n-1) = \frac{v_n}{n!} = \frac{1}{2(n-2)!}$$

<u>Partie C</u>

1. Pour $n \geq 2$, en utilisant (1) :

$$E(X_n) = p(X_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} k\left[\frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} p(X_i = k-1)\right]$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\left[\sum_{k=2}^{i} k\cdot p(X_{i-1} = k-1)\right]$$

$$E(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\left[\sum_{k=1}^{i-1}(k+1)\cdot p(X_{i-1} = k)\right]$$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} p(X_{i-1} = k) = 1$; on en déduit :

$$E(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\left[E(X_{i-1}) + 1\right] = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} E(X_{i-1})$$

Et donc :

$$\forall n \geq 2,\quad E(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1$$

2. D'après la première question des préliminaires :

$$\forall n \geq 2,\quad E(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1 \ \Rightarrow\ E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \qquad (3)$$

3. On a

$$\begin{cases} E(X_1) = 1 \\ \forall n \geq 2,\quad E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1,\ E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Initialisation : $E(X_1) = 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}$

Hypothèse de récurrence : On suppose que pour un entier naturel n non nul quelconque, fixé, $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Hérédité : On doit en déduire que $E(X_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

D'après la propriété (3), $E(X_{n+1}) = E(X_n) + \dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

Conclusion : $\forall n \geq 1,\ E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

On reconnaît la série harmonique et, par expérience, on sait que cette série diverge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$; toutefois, ce n'est pas un résultat de cours et on doit savoir le démontrer.

Pour tout entier naturel non nul k et pour réel t compris entre k et $k+1$,

$$k \leq t \leq k+1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En intégrant entre k et $k+1$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

On a, en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\leq \ln n\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

On obtient donc :

$$\ln n\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq \ln n+1$$

On a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$.

Réponses au QCM

1	Vrai ; f est la réciproque de f^{-1}. Si on pose $g=f^{-1}$ alors g et g^{-1} sont dérivables sur I et sur J respectivement ; de plus, pour tout x de J, $g'(x)\neq 0$.
2	Faux ; prendre la fonction partie entière définie sur $[0, 1]$: $f(x)=\lfloor x\rfloor$ $\forall x\in [0,1[,\ f(x)=0$ et $f(1)=1$ Les deux propriétés : f de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $\exists a\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=a$ sont bien vérifiée ; mais f n'est pas C^1 sur $[0, 1]$ car elle n'y est même pas continue.
3	Faux ; on a : $f(b)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt$ Le changement de variable $u=b-t$ donne $f(b)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_0^{b-a}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(b-u)\,dt$
4	Vrai ; cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives. *Voir exercice 7*
5	Faux ; si P est un polynôme de degré n de coefficient dominant a_n, alors $P(X)\cdot e^{-X^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}a_nX^ne^{-X^2}$
6	Vrai ; mais ce n'est pas un résultat de cours et ne peut donc pas être admis sans démonstration. Une récurrence est maladroite ; on a tout de suite u_n positif pour tout n et : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k=u_{n+1}\frac{1}{1-q}=u_n\frac{q}{1-q}$ On a $q\in\,]0,1[$ donc $1-q\in\,]0,1[$ et donc $\frac{q}{1-q}\geq q$. La propriété en découle.

7	Faux ; on laisse le soin au lecteur de vérifier que la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = (-1)^n + 2n$ est une suite monotone croissante (mais pas strictement croissante).
8	Faux ; la suite de terme général $u_n = n$ n'a pas de limite finie et est monotone.
9	Vrai ; *voir exercice 3*
10	Vrai ; si a et b étaient distincts, alors pour $\varepsilon = \frac{\lvert b-a\rvert}{2}$, on aurait, $0 < \varepsilon < \lvert a-b\rvert \leq \varepsilon$
11	Vrai si λ est non nul car dans ce cas les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes et tendent vers $+\infty$ si $\lambda > 0$ et vers $-\infty$ si $\lambda < 0$. Faux en général si $\lambda = 0$; prendre, par exemple $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ On reconnaît des séries géométriques convergentes ; quelles sont leurs sommes ?
12	Faux. La suite (u_n) définie pour $n > 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est majorée par le réel 1 et la série harmonique $\sum u_n$ n'est pas majorée (ni par 1 ni par un autre nombre).
13	Faux ; par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alors $(-1)^n u_n = \frac{1}{n}$
14	Faux, sinon tous les automorphismes seraient égaux.
15	Vrai ; c'est évident dans le cas d'une variable discrète finie. Si X est une variable discrète infinie, le cours nous enseigne que X admet une espérance si la série $\sum x_i\, p(X = x_i)$ est absolument convergente ; le théorème de transfert nous dit alors que : $\sum_{x_i \in X(\Omega)} \lvert x_i\rvert\, p(X = x_i) = E(\lvert X\rvert)$
16	Faux ; d'abord une fonction de répartition n'est pas constante car elle a une limite nulle en $-\infty$ et une limite égale à 1 en $+\infty$; ensuite, si $x \leq y$ alors $p(X \leq y) = p(X \leq x) + p(x < X \leq y)$ Il s'ensuit qu'une fonction de répartition est toujours croissante.
17	Faux ; il doit y avoir confusion avec la propriété suivante : Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p et si Y suit une loi binomiale de paramètres m et p, alors, si X et Y sont indépendantes, $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n + m$ et p.
18	Vrai ; on a $V(X+Y) = n(p+q)(1-p-q)$, $V(X) = np(1-p)$ et $V(Y) = nq(1-q)$; on en déduit : $2\mathrm{cov}(X,Y) = V(X+Y) - V(X) - V(Y) \neq 0$
19	Faux ; par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Les matrices A et B sont diagonalisables mais pas $A+B$.
20	Faux ; prendre la matrice nulle ; on a bien $N^2 = N$ mais $\mathrm{rg}(N) = 0$
21	Vrai ; puisque N est inversible, N^{-1} existe et $N = N^{-1}N^2 = N^{-1}N = I$
22	Faux ; pour : $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
23	Vrai ; si $AB = I$ et si B est non inversible, alors il existe X non nul tel que $BX = 0$; mais alors on a $X = ABX = 0$, ce qui est contradictoire ; donc B est inversible et par suite A aussi.
24	Vrai ; on a $AB = BA = I$ et ${}^tA = A$; en transposant, ${}^tB = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1} = B$.