Mathématiques

Cahier de vacances

François Delaplace
Professeur de Mathématiques, lycée Notre-Dame du Grandchamp (Versailles).

Après une année studieuse passée à étudier en classe préparatoire, il est bien légitime de penser enfin à se reposer ; mais, prudence, réservons-nous quelques jours, disons les quinze derniers jours de vacances, pour faire le point sur nos connaissances.

Oubliez tout, partez en vacances et si, vers le 15 août, vous êtes capable de répondre correctement au petit test suivant, alors vous êtes prêt pour la rentrée ; mais si vous vous trompez sur un certain nombre de questions ou si certaines vous sont complètement étrangères, il est temps de vous y remettre. Vous trouverez dans les pages qui suivent, de quoi vous aider à vous remettre dans l'ambiance, en pensant à ce qui vous attend.

L'exercice 1 est faisable, bien que difficile pour les "option économique".

Les autres exercices marqués du symbole "★" sont réservés aux options scientifiques par les connaissances qu'ils demandent.

F. D.

Test

Ce test est composé de six énoncés ou raisonnements incorrects. A vous de les corriger.
(Réponses à la fin de l'article)

1) *Soit g la fonction définie par :*

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

On suppose démontré l'existence d'un unique réel x_1 tel que $g(x_1) = x_1$ et d'un unique réel x_0 tel que $e^{-x_0} = x_0$.

Montrer que $x_1 = x_0$.

<u>*Preuve*</u>

On recherche les réel x qui vérifient :

$$\frac{1+x}{1+e^x} - x = -x + e^{-x}$$

On réduit ;

$$1 + x = e^{-x}\left(1+e^x\right)$$

et donc $e^{-x} = x$. On en déduit que $x = x_0$ et par suite :

$$\frac{1+x_0}{1+e^{x_0}} - x_0 = -x_0 + e^{-x_0} = 0$$

Il s'ensuit que $g(x_0) = x_0$ et donc $x_1 = x_0$.

2) *Si la dérivée f' d'une fonction f vérifie* $f'(a) = 0$ *alors, nécessairement,* $f''(a) = 0$.

3) *Pour qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I ait un extremum sur I en un point c, il faut que* $f'(c) = 0$.

4) *Si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi définies sur un même univers ; on a nécessairement X = Y.*

5) *Pour que A soit le carré d'une matrice B, il faut que tous les coefficients de A soient positifs.*

6) *Soit A une matrice de* $M_{n,p}(\mathbb{R})$, *X et B des matrices de* $M_{p,1}(\mathbb{R})$ *et de* $M_{n,1}(\mathbb{R})$. *Pour que AX = B ait une solution unique, il faut que A soit une matrice carrée.*

Exercice 1 (INSEEC 1992 E)

On considère une urne contenant initialement une boule blanche. On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce ; on suppose que la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p, $p \in]0, 1[$.
Au premier lancer, si on obtient pile, on tire une boule de l'urne et on s'arrête, sinon, on ajoute 3 boules noires au contenu de l'urne et on relance la pièce.
Au second lancer, si on obtient pile, on tire une boule de l'urne et on s'arrête, sinon, on ajoute 5 boules noires au contenu de l'urne et on relance la pièce.
D'une façon générale, au $k^{\text{ème}}$ lancer, si on obtient pile, on tire une boule de l'urne et on s'arrête, sinon, on ajoute $(2k + 1)$ boules noires au contenu de l'urne et on relance la pièce.
Dans le cas où le joueur n'obtient que des faces, on lui donne une boule blanche.

Partie A

1. Soit X la variable égale au nombre de lancers avant le tirage d'une boule dans l'urne. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. On considère les deux événements :
   B : « On obtient une boule blanche »
   B_k : On obtient une boule blanche à l'issue du $k^{\text{ème}}$ lancer »
   Calculer, pour k entier naturel non nul, $p(B / X = k)$ et $p(B_k)$
   Démontrer que
   $$p(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(1-p)^{k-1}}{k^2}$$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0, 1[$,
   $$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$
2. On pose
   $$\Theta_2(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$
   Montrer que pour tout x appartenant à $[0, 1[$,
   $$0 \le \Theta_2(x) \le x^n \ln\frac{1}{1-x}$$
   Démontrer que la fonction
   $$\left|\begin{array}{l}]0,1[\ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\Theta_2(x)}{x} \end{array}\right.$$
   est prolongeable par continuité en 0.
3. Justifier l'existence de
   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$$
   Démontrer que
   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \ln(1-x) = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k-1}}{k}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x}\,dx$$

En déduire que si $u_k = \dfrac{1}{2^k . k^2}$ alors :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x}\,dx$$

4. En utilisant la question 2, montrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x}\,dx \leq \ln 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}\,dx$$

Déduire des questions précédentes la convergence de la série de terme général u_k et établir

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$$

5. Ecrire sous forme d'intégrale, la probabilité de l'événement B lorsque $p = ½$.

Corrigé exercice 1

Partie A

1. La variable X désigne le temps d'attente du premier succès (« tirer une boule », c'est-à-dire « obtenir pile »), dans une succession d'épreuves identiques et indépendantes. Donc X suit une loi géométrique de paramètre égal à la probabilité du succès, c'est-à-dire p. Il s'ensuit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad p(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

On sait que $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

2. Supposons que « $X = k$ » soit réalisé. Il y a dans l'urne, 1 boule blanche et $3 + 5 + \ldots + (2k - 1)$ boules noires. Il y a donc en tout

$$\sum_{i=1}^{k} (2i-1) = \frac{[1+(2k-1)]k}{2} = k^2$$

boules dans l'urne dont une blanche. La probabilité de B sachant $X = k$ est donc :

$$p(B/X=k) = \frac{1}{k^2}$$

L'événement B_k est l'événement $B \cap (X=k)$. On a :

$$p(B_k) = p(B \cap (X=k)) = p(X=k)\,p(B/X=k)$$

On obtient :

$$p(B_k) = p(1-p)^{k-1} \cdot \frac{1}{k^2}$$

La famille $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant un système quasi-complet d'événements, on a

$$p(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} p(B_k) = \sum_{k\geq 1} \frac{p(1-p)^{k-1}}{k^2}$$

Partie B

1. La fonction $x \mapsto f_1(x) = \ln(1-x)$ est dérivable sur [0, 1[ainsi que la fonction définie par :

$$x \mapsto f_2(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

Leurs dérivées sont respectivement

$$f_1'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \quad \text{et} \quad f_2'(x) = -\left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) - \frac{x^n}{1-x}$$

Clairement, elles sont égales et comme de plus $f_1(0) = f_2(0)$, on en déduit que les deux fonctions sont égales.

2. On a la proposition

$$\forall t \in [0,1[,\quad 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$$

implique

$$0 \leq \Theta_2(x) \leq x^n \int_0^x \frac{dt}{1-t} = x^n\left[-\ln(1-t)\right]_0^x$$

en effectuant les calculs, on a bien

$$0 \leq \Theta_2(x) \leq x^n \ln\frac{1}{1-x}$$

La fonction ϕ

$$\left|\begin{array}{l}]0,1[\;\to\; \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\Theta_2(x)}{x} \end{array}\right.$$

est définie, continue comme quotient de fonctions continues car Θ_2 est une primitive ; reste à montrer qu'elle est prolongeable par continuité en 0. Or, pour tout entier naturel non nul n,

$$0 \leq \frac{\Theta_2(x)}{x} \leq x^{n-1} \ln \frac{1}{1-x}$$

et on a :

$$\lim_{x \to 0} x^{n-1} \ln \frac{1}{1-x} = 0$$

car au moins un des deux facteurs tend vers 0, (les deux lorsque n est plus grand que 1).
par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Theta_2(x)}{x} = 0$$

3. Pour tout réel x appartenant à]0, 1[,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \Theta_2(x)$$

et donc,

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \cdots - \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{\Theta_2(x)}{x} \qquad (**)$$

et d'après la question précédente, cette fonction peut être prolongé en 0. Ainsi la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$$

est continue sur]0, ½] et prolongeable par continuité en 0. D'où l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

On a immédiatement à partir de (**) par intégration

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x} dx$$

Or

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k-1}}{k} dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{k-1}}{k} dx = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x^k}{k^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k \cdot k^2}$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k \cdot k^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x} dx$$

par transposition,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x} dx \qquad (***)$$

4. On a vu plus haut que pour tout x appartenant à]0, ½],

$$0 \leq \frac{\Theta_2(x)}{x} \leq x^{n-1} \ln \frac{1}{1-x}$$

Comme de plus

$$0 \leq \ln \frac{1}{1-x} \leq \ln 2$$

on en déduit que pour tout x appartenant à]0, ½],

$$0 \leq \frac{\Theta_2(x)}{x} \leq x^{n-1} \ln 2$$

Cette relation est aussi vraie pour $x = 0$, en confondant la fonction

$$x \mapsto \frac{\Theta_2(x)}{x}$$

avec son prolongement par continuité en 0. Par intégration, on a :

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x} dx \leq \ln 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} dx$$

Par suite,

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x} dx \leq \ln 2 \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{n \cdot 2^n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet de conclure que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Theta_2(x)}{x} dx = 0$$

il résulte de (***) que la série de terme général u_n est convergente et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

5. Retour à la première partie pour $p = ½$. On a :

$$p(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(B_k) = \sum_{k \geq 1} \frac{p(1-p)^{k-1}}{k^2} = \sum_{n \geq 1} u_n$$

On peut donc écrire :

$$p(B) = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$$

Je tiens à rassurer celles et ceux qui penseraient que nous obtenons ici une probabilité négative. Il n'en est rien, car pour x compris entre 0 et $1/2$, $\ln(1-x)$ est négatif et par suite, l'intégrale aussi.

Exercice 2 (★)

Soit n un entier naturel plus grand que 1. Montrer que l'équation

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x(x-2)\cdots(x-n)+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=0$$

admet au moins n racines $x_1, x_2, \cdots, x_n$ telles que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et n, $x_k \in \left]k-1, k\right[$.

Corrigé exercice 2 (★)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

cette fonction est définie continue dérivable sur R et donc sur tout intervalle de R. Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n, on a :

- f continue sur $[k-1, k]$
- f dérivable sur $]k-1, k[$
- $f(k-1) = f(k) = 0$

D'après le théorème de Rolle on en déduit qu'il existe x_k strictement compris entre $k-1$ et k tel que $f'(x_k) = 0$.

Par ailleurs,

$$f'(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x(x-2)\cdots(x-n)+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

la conclusion en découle.

Exercice 3 (★)

Soit n un entier naturel strictement positif et f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$. Donner un encadrement de la dimension de Ker(f) sachant que

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f^2) = n$$

Corrigé exercice 3 (★)

Certes, la question est ouverte et le candidat me répondant (sans réfléchir trop longtemps) que $0 \le \dim \mathrm{Ker}(f) \le n$ a déjà droit à mon estime et à ma considération.

Alors recherchons maintenant, "le meilleur" encadrement possible de cette dimension.

Pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, si $\vec{x}$ appartient à Ker f, il vérifie

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad f \circ f(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

Par suite Ker f est inclus dans Ker f^2 et $\dim(\mathrm{Ker}\, f) \le \dim(\mathrm{Ker}\, f^2)$

En additionnant dim (Ker f) dans chaque membre : $2\dim(\mathrm{Ker}\, f) \le n$ et donc

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Les plus érudits le savent, l'inégalité $\dim(\mathrm{Ker}\, f) \le \dim(\mathrm{Ker}\, f^2)$ n'est pas stricte ; on peut avoir l'égalité dans le cas, par exemple, où f est un projecteur.

Considérons maintenant $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m)$ une base de Ker f. Comme Ker f est inclus dans Ker f^2, on peut compléter la base de Ker f en une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \vec{e}_{m+2}, \cdots, \vec{e}_{m+p})$ de Ker f^2.

On a, pour tout i plus petit que p, $f(\vec{e}_{m+i}) \in \mathrm{Ker}\, f$; supposons que p soit plus grand que m.

La famille $\left(f(\vec{e}_{m+i})\right)_{1\le i\le p}$ est une famille liée car elle est composée de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension m plus petit que p ; il existe donc une famille (a_i) de réels non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} a_i f(\vec{e}_{m+i}) = \vec{0} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad f\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \vec{e}_{m+i}\right) = \vec{0}$$

Donc $\sum_{i=1}^{p} a_i \vec{e}_{m+i} \in$ Ker f. Il existe donc une famille (b_i) de réels tels que

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \vec{e}_{m+i} = \sum_{i=1}^{m} b_i \vec{e}_i \iff \sum_{i=1}^{p} a_i \vec{e}_{m+i} - \sum_{i=1}^{m} b_i \vec{e}_i = \vec{0}$$

Or la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \vec{e}_{m+2}, \cdots, \vec{e}_{m+p})$ est libre, ce qui contredit le fait qu'au moins un des coefficients a_i n'est pas nul. Il en résulte que p est inférieur ou égal à m et donc la dimension de Ker f^2 est au plus égal à $2m$.

Par suite :

$$\dim \mathrm{Ker}\, f^2 \le 2 \dim \mathrm{Ker}\, f \qquad n = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f^2) \le 3 \dim \mathrm{Ker}\, f$$

Et donc, $\dim \mathrm{Ker}\, f \ge n/3$

Finalement,

$$\frac{n}{3} \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq \frac{n}{2}$$

Par exemple, pour $n = 3m$, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans cette base est :

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

montre que la valeur $n/3$ pour la dimension de Ker f peut être atteinte. Il en résulte que l'encadrement donné est le meilleur qui soit.

Exercice 4 (★)

Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans un espace vectoriel F tel que les deux espaces Ker(f) et Im(f) soient de dimensions finies.
Montrer que E est de dimension finie.

Corrigé exercice 4 (★)

Attention, ne pas écrire : "Ker(f) et Im(f) sont de dimensions finies, donc la somme de leur dimension existe et par suite, $\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$". Le théorème du rang ne permet pas de déduire que E est de dimension finie.
Voici ce que je vous propose :
Soit $\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p\right)$ une base de Im(f) ; il existe une famille $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p\right)$ d'éléments de E tel que, pour tout entier i compris entre 1 et p, $f\left(\vec{e}_i\right) = \vec{u}_i$. Il est clair que cette famille est libre car une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \vec{e}_i = \vec{0} \quad \text{implique} \quad f\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \vec{e}_i\right) = \vec{0} \quad \text{et donc} \quad \sum_{i=1}^{p} a_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

L'indépendance linéaire de la famille $\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p\right)$ implique alors que tous les scalaires a_i sont nuls.
Soit $\vec{x}$ un vecteur quelconque de E ; il existe des scalaires $b_1, b_2, \ldots, b_p$, tels que

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} b_i \vec{u}_i = f\left(\sum_{i=1}^{p} b_i \vec{e}_i\right)$$

Il s'ensuit que le vecteur $\vec{x} - \sum_{i=1}^{p} b_i \vec{e}_i$ est un élément de Ker(f).

Si f est bijective, alors $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} b_i \vec{e}_i$ et on en déduit que $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_p\right)$ est une base de E et donc que E est de dimension finie.
Si f n'est pas bijective, comme Ker(f) est de dimension finie, il existe une base $\left(\vec{e}_{p+1}, \vec{e}_{p+2}, \cdots, \vec{e}_{p+q}\right)$ de Ker(f) et $\vec{x}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{p+q}\right)$; la famille $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_{p+q}\right)$ étant génératrice de E, cet espace est de dimension fini.

Exercice 5 (★)

Soit m et d des entiers naturels non nuls, $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ les m zéros distincts, d'ordre de multiplicité $r_1, r_2, \ldots, r_m$ d'un polynôme réel P ; il existe un réel α tel que

$$P(X) = \alpha\,(X - a_1)^{r_1}\,(X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_m)^{r_m}$$

On conviendra de dire si m est supérieur à 1, que pour tout i compris entre 1 et $m - 1$, les réels a_i et a_{i+1} sont deux racines consécutives de P.
Montrer en utilisant le théorème de Rolle, que si $P'(X)$ divise $P(X)$ alors $m = 1$.

Corrigé exercice 5 (★)

On notera que si $m = 1$ alors le polynôme P s'écrit $P(X) = \alpha\,(X - a)^d$, avec $d = r_1 \geq 1$, et $P'(X) = \alpha d\,(X - a)^{d-1}$; on a alors

$$P(X) = \frac{1}{d}(X - a)\,P'(X)$$

ce qui montre que $P'(X)$ divise $P(X)$; (on notera que cette relation est valable pour tout entier naturel d non nul, y compris pour $d = 1$; dans ce cas $P'(X)$ est un polynôme constant et divise $P(X)$).

Supposons m plus grand que 1 ; alors, avec les notations de l'énoncé, P admet au moins deux racines distinctes et consécutives a_1 et a_2 ; on a :

P continue sur $[a_1, a_2]$
P dérivable sur $]a_1, a_2[$
$P(a_1) = P(a_2)$

donc il existe un réel b appartenant à $]a_1, a_2[$ tel que $P'(b) = 0$; or, b n'est pas une racine de P et donc $P(b) \neq 0$; par suite il ne peut exister de polynôme Q tel que $P(X) = P'(X)Q(X)$ car on aura toujours $P(b) \neq P'(b)Q(b)$.
Il s'ensuit que si $P'(X)$ divise $P(X)$ alors $m = 1$.

Exercice 6 (★)

Soit d un entier naturel non nul et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(X) = \alpha (X - a_1)^{r_1} (X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_m)^{r_m}$$

où

tous les nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont distincts,

$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = d$

pour tout i compris entre 1 et m, r_i désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1

Montrer que si $P'(X)$ divise $P(X)$ alors $m = 1$.

Corrigé exercice 6 (★)

On notera qu'il est impossible d'utiliser le théorème de Rolle comme dans le cas réel.
On utilisera la propriété suivante :

Si P' divise P alors toute racine de P' est racine de P

Allez, courage, dérivons le polynôme P. Pour cela, rappelons la formule de la dérivée d'un produit

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'$$

Chacun des entiers r_i étant au moins égal à 1, on peut écrire

$$P'(X) = \alpha \sum_{i=1}^{m} r_i (X - a_1)^{r_1} (X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_i)^{r_i - 1} \cdots (X - a_m)^{r_m}$$

$$P'(X) = \alpha (X - a_1)^{r_1 - 1} (X - a_2)^{r_2 - 1} \cdots (X - a_m)^{r_m - 1} Q(X)$$

où

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{m} r_i (X - a_1) \cdots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \cdots (X - a_m)$$

On notera que Q est la somme de m polynômes de degré $m - 1$ et que le coefficient de X^{m-1} est l'entier naturel $r_1 + r_2 + \ldots + r_m \geq m > 0$. Ainsi le polynôme Q est de degré $m - 1$.
Supposons que m soit différent de 1 ; le polynôme Q admet donc $m - 1$ racines complexes (distinctes ou non) ; soit b une racine de Q ; pour tout entier naturel i on a :

$$Q(a_i) = r_i (a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n) \neq 0$$

Il s'ensuit que b est distinct de tous les a_i et donc b est racine de P' mais pas de P ; d'après la propriété énoncé au début de l'exercice, P' ne divise pas P.
Ainsi, pour que P' divise P, il faut que $m = 1$. Comme dans l'exercice précédent, on montre que $m = 1$ convient.

Notes de cours (★)

Rang d'une application linéaire

Le rang d'une application linéaire f est la dimension de l'image de f. Si A est la matrice de f, alors l'image de f est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs dont les matrices sont les colonnes de A. On recherche alors le nombre de vecteurs linéairement indépendants. Par exemple, si A est la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $\mathrm{Im}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par $(1, 1, 1)$; le rang de f est donc 1.

Composition d'injections, de surjections, de bijections

Toute composition d'applications injectives, surjectives ou bijectives est respectivement injective, surjective ou bijective.

Sous-espaces supplémentaires et somme directe

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ si

$$\begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}\} \\ \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{cases}$$

ou si

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \ \exists! (\vec{v}, \vec{w}) \in F \times G, \ \ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

ou si une base de $\mathbb{R}^3$ est la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Dans ce cas, la somme de ces sous-espaces vectoriels est dite directe et on note $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Espace propre et diagonalisation

Soit f un endomorphisme et λ une valeur propre de f. L'espace propre de f associé à la valeur propre λ est le noyau de $f - \lambda id$.
L'endomorphisme f (ou sa matrice) est diagonalisable si la somme des dimensions des espaces propres est égale à la dimension de l'espace.

Exercice 7 (★)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. Calculer A^2 ; quel est le rang de A^2 ?
   En déduire que f n'est pas bijective, puis, sans calcul, donner une valeur propre de f.
   Sans calcul supplémentaire, donner le rang de f et la dimension de Ker(f).
3. Du calcul de A^2, montrer que 2 est valeur propre de A.
4. On suppose que A est diagonalisable. Donner l'ensemble des valeurs propres de f.
   La matrice A est-elle effectivement diagonalisable ? Si oui, préciser une matrice diagonale semblable à A^2.
5. Montrer que Ker(f^2) et Im(f^2) sont supplémentaires. A^2 est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une matrice diagonale semblable à A^2.
6. Justifier que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ définie $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et par $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ est une base de Ker(f^2).
   Montrer que Ker(f) $\subset$ Ker(f^2).
   Déduire de ce qui précède une base de Ker(f). Quelle est la dimension de Ker(f) $\cap$ Im(f) ?
   Sans autre calcul, donner une base de Ker(f) $\cap$ Im(f).
7. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice A' de f s'écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé exercice 7 (★)

1. On a immédiatement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On obtient,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Il est clair que l'image de A^2 est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ et donc que le rang de A^2 est 1. Il s'ensuit, d'après le théorème du rang que la dimension du noyau de f^2 est 2 et donc que f^2 n'est pas bijective.
   Si f était une application bijective, alors f^2 en serait aussi une comme composition de bijection ce qui n'est pas ; donc f n'est pas bijective et la dimension de son noyau est supérieure ou égale à 1.
   Il en résulte que 0 est une valeur propre de f.
   D'après le théorème du rang, le rang de f est soit 0, soit 1, soit 2. Ce n'est pas 0 sinon f serait l'endomorphisme nul et sa matrice serait aussi la matrice nulle. Ce n'est pas 1 car, de toute évidence, la première et la seconde colonne de A sont des matrices de vecteurs non colinéaires ; donc la dimension de Im(f) est au moins égale à 2.
   Il s'ensuit qu'elle est exactement égale à 2 et donc que la dimension de Ker(f) est 1.
3. On remarque que la deuxième colonne de la matrice produit est la matrice du vecteur $2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$; c'est le produit de A par la matrice du vecteur $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$. Il en résulte que 2 est une valeur propre de f et que $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ en est un vecteur propre.
4. Si A est diagonalisable, la matrice A^2 l'est aussi et les valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A.
   Toujours si A est diagonalisable, la somme des valeurs propres de A (ou de f) est égale à la trace de la matrice A, c'est-à-dire 2, et la somme des carrés des valeurs propres est la trace de la matrice A^2 ; si λ_1, λ_2 et 2 désignent les valeurs propres de A (ou de f), alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 = 2 \\ \lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + 4 = 4 \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et par suite l'ensemble des valeurs propres de *f* est $\{0, 2\}$.

On sait déjà que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0, c'est-à-dire la dimension du noyau de *f*, est 1. Déterminons la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 2.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La première et la dernière colonne de $A - 2I$ sont des matrices de vecteurs colinéaires mais pas les deux premières ; il en résulte que le rang de $A - 2I$ est 2 et donc que la dimension du noyau de $f - 2id$ est 1. Il s'ensuit que l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

La somme des dimensions des espaces propres est égale à 2 et est inférieure à la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$, donc A n'est pas diagonalisable.

5. On a montré que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On en a déduit que A^2 est de rang 1, et qu'il est engendré par $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$; nous avons aussi vu que $f\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right) = 2\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right)$; on en déduit que $f^2\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right) = 4\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right)$. Enfin nous avons démontré, en utilisant le théorème du rang, que Ker(f^2), c'est-à-dire l'espace propre associé à la valeur propre 0, est de dimension 2. Il en résulte deux choses :

Comme le noyau et l'image sont deux espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, ils n'ont en commun que le vecteur nul ; on a donc :

$$\begin{cases} Ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{\vec{0}\} \\ \dim Ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{cases}$$

et il s'ensuit que Ker(*f*) et Im(*f*) sont supplémentaires.

Comme le noyau et l'image sont deux espaces propres dont la somme des dimensions est égale à la dimension de l'espace, il s'ensuit que A^2 est diagonalisable et que A^2 est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Pour montrer que les deux vecteurs $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ est une base de Ker(f^2), on va d'abord montrer qu'ils sont des éléments de Ker(f^2) puis qu'ils forment une famille libre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc les deux vecteurs $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ sont éléments de Ker(f^2).

D'autre part, les deux vecteurs $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ ne sont pas colinéaires ; donc ils engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 2 et donc $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ est une base de Ker(f^2).

Il est clair que Ker(*f*) $\subset$ Ker(f^2) puisque

$$\vec{u} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \text{ et donc } f^2(\vec{u}) = f\left(f(\vec{u})\right) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

Une base de Ker(*f*) est formé d'un vecteur non nul de Ker(*f*). Ce vecteur étant dans Ker(f^2), il est combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$. Soit $\vec{w} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ un tel vecteur. On a :

$$\vec{w} = (2a + 3b)\vec{e}_1 - a\vec{e}_2 - b\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a + 3b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -2a - 4b = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes; il y a une infinité de solutions, en particulier, en prenant $b = 1$, on a $a = -2$. par suite, le vecteur $\vec{w} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ est un vecteur de base de Ker(*f*).

Ker(f^2) contient des vecteurs qui ne sont pas dans Ker(*f*) puisque sa dimension est 2. Soit $\vec{v}$ un vecteur de Ker(f^2) qui n'est pas dans Ker(*f*). Son image $f(\vec{v})$ est dans Ker(*f*) puisque $f\left[f(\vec{v})\right] = \vec{0}$ Donc Ker(*f*) et Im(*f*) ont en commun au moins un vecteur non nul, à savoir $f(\vec{v})$; comme la dimension de Ker(*f*) est 1, Ker(*f*) $\subset$ Im(*f*). Par suite la dimension de Ker(*f*) $\cap$ Im(*f*) est 1.

Un coup d'œil sur la matrice A nous montre que le vecteur $\vec{w} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ est une combinaison linéaire des trois vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$; plus précisément, $\vec{w} = -f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3)$. Ainsi $(\vec{w})$ est une base de Ker(*f*) ∩ Im(*f*).

7. Prenons pour base de $\mathbb{R}^3$, la réunion d'une base de Ker(f^2), $(\vec{w}, \vec{v})$ et d'un vecteur propre de *f* associé à la valeur propre 2, par exemple, le vecteur $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$. Le vecteur $\vec{v}$ a son image dans Ker(*f*). Par suite $f(\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{w}$; soit $\vec{v}_1$ tel que $f(\vec{v}_1) = a\vec{w}$ où *a* est un réel non nul ; alors le vecteur $\vec{v} = \frac{1}{a}\vec{v}_1$ a pour image le vecteur $\vec{w}$. Dans la base $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ la matrice *A'* de *f* est :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (★)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on désigne par *F* l' ensemble des endomorphismes non diagonalisables *f* vérifiant

$$(f - id_E)^2 \circ f = \theta$$

où θ désigne l'endomorphisme nul.

Comparer, pour *f* élément de *F*, $Ker(f - id_E)^2$ et *Im*(*f*). En déduire que les sous–espaces vectoriels $Ker(f)$ et $Ker(f - id_E)^2$ sont supplémentaires

En étudiant les valeurs propres de *f*, donner, dans une base bien choisie, toutes les matrices possibles associées à *f*.

Corrigé exercice 8 (★)

Soit $\vec{x}$ un élément de *Im*(*f*). Il existe un élément $\vec{y}$ de *E* tel que $f(\vec{y}) = \vec{x}$; on a alors

$$\vec{0} = \left[(f - id_E)^2 \circ f\right](\vec{y}) = (f - id_E)^2(\vec{x})$$

et donc $\vec{x}$ est un élément de $Ker(f - id_E)^2$.

Réciproquement, si $\vec{x}$ appartient à $Ker(f - id_E)^2$, on a $(f - id_E)^2(\vec{x}) = \vec{0}$, c'est-à-dire

$$f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$$

ou encore

$$f(2\vec{x} - f(\vec{x})) = \vec{x}$$

Il en résulte que $\vec{x}$ appartient à *Im*(*f*).

On peut donc en conclure que $Ker(f - id_E)^2 = Im(f)$ et donc aussi :

$$\dim Ker(f - id_E)^2 + \dim Ker(f) = \dim Im(f) + \dim Ker(f) = 3$$

Ainsi, pour montrer que $Ker(f)$ et $Ker(f - id_E)^2$ sont supplémentaires, il suffit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul.

Soit $\vec{x}$ un vecteur de $Ker(f) \cap Ker(f - id_E)^2$; il vérifie

$$\begin{cases} f^2(\vec{x}) - 2f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0} \\ f(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases}$$

Clairement, $\vec{x}$ est nécessairement nul.

Il s'ensuit que $Ker(f)$ et $Ker(f - id_E)^2$ sont supplémentaires.

Etudions les valeurs propres possibles de *f*. Soit λ une valeur propre de *f*, alors pour tout vecteur propre $\vec{x}$ associé,

$$\vec{0} = (f - 2id_E)^2 \circ f(\vec{x}) = f^3(\vec{x}) - 2f^2(\vec{x}) + f(\vec{x}) = \lambda^3\vec{x} - 2\lambda^2\vec{x} + \lambda\vec{x}$$

Comme le vecteur $\vec{x}$ n'est pas nul, λ est racine de l'équation $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Les seules valeurs propres possibles de *f* sont donc 0 et 1.

Le réel 0 ne peut pas être la seule valeur propre de *f*, sinon on aurait,

$$\dim Ker(f - id_E)^2 + \dim Ker(f) = 0 + \dim Ker(f) = 3$$

Il s'ensuivrait que *f* serait l'endomorphisme nul et serait donc diagonalisable. En conséquence, si 0 est valeur propre de *f*, alors 1 l'est aussi. Montrons maintenant que $Ker(f - id_E)^2$ contient strictement $Ker(f - id_E)$.

Déjà, chacun sait que $Ker(f - id_E)$ est inclus dans $Ker(f - id_E)^2$; rappelons en la démonstration pour ceux que les vacances auraient rendu amnésique :

pour tout vecteur $\vec{x}$ de $Ker(f - id_E)$,

$$(f - id_E)^2(\vec{x}) = (f - id_E)\left((f - id_E)(\vec{x})\right) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

et donc $\vec{x}$ appartient à $Ker(f - id_E)^2$.

Si $Ker\left(f-id_E\right)=Ker\left(f-id_E\right)^2$ alors $Ker\left(f\right)$ et $Ker\left(f-id_E\right)$ seraient supplémentaires et espaces propres de *f* ; donc *f* serait diagonalisable.

Il en résulte que $Ker\left(f-id_E\right)\subsetneq Ker\left(f-id_E\right)^2$.

Comme $Ker\left(f\right)\oplus Ker\left(f-id_E\right)^2=E$, et que $Ker\left(f-id_E\right)\subsetneq Ker\left(f-id_E\right)^2$, on construit une base $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ de E telle que

$$\begin{cases}\vec{e}_1\in Ker\left(f\right)\\ \vec{e}_2\in Ker\left(f-id_E\right)\\ \vec{e}_3\in Ker\left(f-id_E\right)^2\setminus Ker\left(f-id_E\right)\end{cases}$$

Par suite

$$\begin{cases}f\left(\vec{e}_1\right)=\vec{0}\\ f\left(\vec{e}_2\right)=\vec{0}\\ f\left(\vec{e}_3\right)=\vec{e}_3+\alpha\,\vec{e}_2\end{cases}$$

La dernière ligne provient du fait que $\left(f-id_E\right)\left(\vec{e}_3\right)\in Ker\left(f-id_E\right)$; il existe donc un réel α tel que $\left(f-id_E\right)\left(\vec{e}_3\right)=\alpha\,\vec{e}_2$.

La matrice M de *f* s'écrit alors dans cette base :

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Si le réel 1 n'est pas la seule valeur propre de *f*, alors 0 l'est aussi et ce cas vient d'être traité.

Montrons maintenant que 1 peut être la seule valeur propre de *f*. Il est clair que pour que 1 soit la seule valeur propre, il faut qu'on ait l'inclusion stricte :

$$Ker\left(f-id_E\right)\subsetneq Ker\left(f-id_E\right)^2$$

sinon f serait l'identité. Réciproquement si $Ker\left(f-id_E\right)\subsetneq Ker\left(f-id_E\right)^2$ alors 1 est la seule valeur propre de *f* et l'espace propre de *f* (à savoir $Ker\left(f-id_E\right)$) n'est pas l'espace tout entier ; donc *f* n'est pas diagonalisable dans ce cas. De plus on a :

$$\dim Ker\left(f-id_E\right)^2+\dim Ker\left(f\right)=\dim Ker\left(f-id_E\right)^2+0=3$$

Quelles sont les dimensions possibles de $Ker\,(f-id_E)$? D'après ce qui précède, elle est au moins égale à 1 (car 1 est valeur propre de *f*), elle est au plus égal à 2 (car on a l'inclusion stricte $Ker\left(f-id_E\right)\subsetneq Ker\left(f-id_E\right)^2$).

Supposons qu'elle soit égale à 1 ; alors on pourrait construire une base $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ de E telle que :

$$\begin{cases}\vec{e}_1\in Ker\left(f-id_E\right)\\ \vec{e}_2,\vec{e}_3\in Ker\left(f-id_E\right)^2\setminus Ker\left(f-id_E\right)\end{cases}$$

Dans ce cas, $\left(f-id_E\right)\left(\vec{e}_2\right)$ et $\left(f-id_E\right)\left(\vec{e}_3\right)$ serait élément de $Ker\left(f-id_E\right)$ et par suite seraient non nuls, colinéaires entre eux et colinéaires à $\vec{e}_1$. Il existerait donc un réel a tel que $\left(f-id_E\right)\left(\vec{e}_2\right)=a\left(f-id_E\right)\left(\vec{e}_3\right)$. On aurait alors $\left(f-id_E\right)\left(\vec{e}_2-a\,\vec{e}_3\right)=\vec{0}$;

D'où l'existence d'un réel b tel que $\vec{e}_2-a\,\vec{e}_3=b\,\vec{e}_1$. Par suite la famille $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ serait une famille liée ce contredit le fait que ce soit une base.

Donc la dimension de $Ker\left(f-id_E\right)$ est nécessairement 2. Dans ce cas, on construit la base $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ telle que

$$\begin{cases}\vec{e}_1,\vec{e}_2\in Ker\left(f-id_E\right)\\ \vec{e}_3\in Ker\left(f-id_E\right)^2\setminus Ker\left(f-id_E\right)\end{cases}$$

Il existe alors deux réels a et b tels que

$$\begin{cases}f\left(\vec{e}_1\right)=\vec{e}_1\\ f\left(\vec{e}_2\right)=\vec{e}_2\\ f\left(\vec{e}_3\right)=\vec{e}_3+a\,\vec{e}_1+b\,\vec{e}_2\end{cases}$$

Et la matrice M de *f* s'écrit

$$M=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est évidemment pas diagonalisable puisqu'elle ne possède qu'une seule valeur propre 1 et n'est pas égal à l'identité.

Exercice 9 (★)

On dit qu'une matrice A est nilpotente s'il existe un entier m supérieur à 1 tel que $A^{m-1} \neq 0$ et $A^m = 0$
Soit A une matrice carrée d'ordre n plus grand que 1; montrer que si elle est nilpotente, il existe un entier k tel que $2 \leq k \leq n$ et $A^k = 0$.

Corrigé exercice 9 (★)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique. On va montrer successivement:

(a). Si A a une valeur propre, elle ne peut être que 0.
(b). 0 est valeur propre de A.
(c). La suite des noyaux $\left(Ker\ f^i\right)_{i\geq 1}$ est une suite croissante de sous espace vectoriels.
(d). S'il existe un i tel que $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+1}$, alors pour tout $p \geq 0$, $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+p}$.
(e). La suite des noyaux $\left(Ker\ f^i\right)_{i\geq 1}$ est stationnaire à partir d'un rang m supérieur à 1 et $\left(Ker\ f^i\right)_{1\leq i\leq m}$ est strictement croissante.
(f). Il existe un entier naturel k tel que $2 \leq k \leq n$ et $A^k = 0$.

(a). Si λ est une valeur propre de f alors il existe X non nul tel que $AX = \lambda X$. Par récurrence (que nous laissons au lecteur), pour tout entier naturel k, $A^kX = \lambda^kX$; et par suite $0 = A^m X = \lambda^m X$ et $X \neq 0$ impliquent $\lambda^m = 0$ et donc $\lambda = 0$.

(b). Si 0 n'est pas valeur propre de A, alors A est inversible et, par récurrence (que nous laissons aussi au lecteur), A^m est inversible et par suite $A^m \neq 0$, ce qui n'est pas. On en déduit donc que 0 est valeur propre de A.

(c). Soit i un entier naturel supérieur ou égal à 1, x un vecteur de $Ker\ f^i$; alors $f^{i+1}(\vec{x}) = f\left(f^i(\vec{x})\right) = f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ et donc $Ker\ f^i \subset Ker\ f^{i+1}$.

(d). Supposons qu'il existe un entier naturel i tel que $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+1}$; montrons par récurrence que quel que soit l'entier naturel p, $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+p}$.

Initialisation : La propriété est triviale pour $p = 0$: $Ker\ f^i = Ker\ f^i$

Hypothèse de récurrence : On suppose que pour un p quelconque fixé, $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+p}$

Hérédité : Montrons que $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+p+1}$.

On a déjà l'inclusion $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+p+1}$ car la suite $\left(Ker\ f^i\right)_{i\geq 1}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels, au sens de l'inclusion. Soit $\vec{x}$ un élément de $Ker\ f^{i+p+1}$. On a $\vec{0} = f^{i+1+p}(\vec{x}) = f^{i+1}\left(f^p(\vec{x})\right)$; donc $f^p(\vec{x}) \in Ker\ f^{i+1}$; mais $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+1}$ par hypothèse, donc $f^p(\vec{x}) \in Ker\ f^i$ et par suite $f^i\left(f^p(\vec{x})\right) = f^{i+p}(\vec{x}) = \vec{0}$. Ainsi $\vec{x} \in Ker\ f^{i+p}$ mais par hypothèse de récurrence, $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+p}$, donc $\vec{x} \in Ker\ f^i$ et donc $Ker\ f^{i+p+1} \subset Ker\ f^i$. Des relations $Ker\ f^i \subset Ker\ f^{i+p+1}$ et $Ker\ f^{i+p+1} \subset Ker\ f^i$ on en déduit $Ker\ f^i = Ker\ f^{i+p+1}$.

(e). La relation $A^m = 0$ équivaut à $Ker\ f^m = \mathbb{K}^n$. On a alors $Ker\ f^{m+1} = \mathbb{K}^n$ et donc la suite $\left(Ker\ f^i\right)_{i\geq 1}$ est bien une suite stationnaire. Soit k le plus petit entier naturel (supérieur ou égal à 2) tel que $Ker\ f^k = \mathbb{K}^n$. On a alors $Ker\ f^{k-1} \underset{\neq}{\subset} Ker\ f^k$, la suite $\left(Ker\ f^i\right)_{1\leq i\leq k}$ est strictement croissante, sinon, d'après la question précédente, elle serait stationnaire avant le rang k et on aurait $Ker\ f^{k-1} = Ker\ f^k$.

(f). Soit k le plus petit entier naturel (supérieur ou égal à 2) tel que $Ker\ f^k = \mathbb{K}^n$. On a les inclusions strictes suivantes : $Ker\ f \subset Ker\ f^2 \subset \cdots \subset Ker\ f^{k-1} \subset Ker\ f^k = \mathbb{R}^n$. On a aussi les inégalités suivantes : $1 \leq \dim\left(Ker\ f\right) < \dim\left(Ker\ f^2\right) < \cdots < \dim\left(Ker\ f^k\right) = n$.
Les inégalités strictes résultent des inclusions strictes ci-dessus et $Ker\ f$ n'étant pas réduit au vecteur nul car non bijective, sa dimension est supérieur ou égal à 1. On a donc, pour tout i inférieur à k, $\dim\left(Ker\ f^{i+1}\right) \geq \dim\left(Ker\ f^i\right) + 1$ et donc, par sommation,
$\sum_{i=1}^{k-1}\left(\dim\left(Ker\ f^{i+1}\right) - \dim\left(Ker\ f^i\right)\right) \geq \sum_{i=1}^{k-1} 1$, soit $\dim\left(Ker\ f^k\right) \geq k - 1 + \dim\left(Ker\ f\right) \geq k$.
Ainsi, on a $k \leq \dim\left(Ker\ f^k\right) = n$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 10 (d'après ESSEC 2001) (★)

Dans le problème qui suit, on retrouve la série $\Sigma(1/n^2)$, qui, comme chacun le sait, est convergente. Mais il nous est impossible de calculer sa somme S sur la calculatrice ou par un programme en Pascal ; on peut, tout au plus, donner une valeur approchée des sommes partielles et donc des valeurs approchées de S.
Dans un premier temps, on va tenter de savoir à quelle distance sommes-nous de S quand on effectue le calcul de la somme partielle S_n pour une valeur de n fixée. A la fin de la première partie, on donnera un encadrement de cette valeur, qu'on appelle « erreur » sur la valeur de S.
Dans un second temps, on va essayer d' augmenter la vitesse de convergence, c'est-à-dire trouver une autre suite (S_n'), de même limite, qui va être à la même ou à une plus petite distance de S pour une valeur de n beaucoup plus petite ;concrètement on recherche une suite (a_n) telle que (a_n) converge vers 0 et (S_n') = ($S_n + a_n$). C'est l'objet de la seconde partie.

On étudie dans ce problème la suite convergente (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \qquad R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

Dans la première partie, on détermine la limite S de cette suite. Dans la deuxième partie, on explicite une méthode permettant d'accélérer la convergence de la suite (S_n) vers S.

Partie I

On considère pour p entier naturel, les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t\,dt \qquad ; \qquad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p} t\,dt$$

1. Convergence de la suite (J_p / I_p)
   a. Etablir l'inégalité suivante :
   $$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$$
   b. Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel p :
   $$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_p - I_{p+1}\right)$$
   c. Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p.
   d. Déduire des résultats précédents la limite de la suite (J_p / I_p).
2. Convergence et limite de la suite (S_n)
   a. En intégrant deux fois par parties I_p $(p \geq 1)$, exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1}.
   b. En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:
   $$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$$
   c. Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite de la suite (S_n).
3. Déterminer un encadrement de R_n pour une valeur de n supérieur ou égal à 1 donnée.

Partie II

On accélère la convergence de (S_n) par une méthode due à Stirling.
On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- Les fonctions f_k, pour k entier naturel, définies par :
$$f_0(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et}$$
$$f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}, \quad k \geq 1$$
- Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :
$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

1. Sommation de séries télescopiques
   a. Etablir que Δ est un endomorphisme de E.
   b. Etablir que pour tout f appartenant à E, la série $\sum(\Delta f)(p)$ converge $(p \geq 1)$ et calculer pour tout entier naturel n les sommes suivantes :
   $$\sum_{p=1}^{+\infty} \Delta f(p) \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=n+1}^{+\infty} \Delta f(p)$$
   c. Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.
   d. Etablir que pour tout entier naturel $k \geq 1$, la série $\sum f_k(p)$ converge et vérifier, pour tout entier naturel n, que :
   $$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$
2. Accélération de convergence de (S_n).
   a. Etablir la relation suivante :
   $$\forall p \geq 1,\ \forall q \geq 1, \quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)!\, f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p)$$
   (on pourra faire une démonstration par récurrence sur q).
   b. En déduire l'inégalité suivante :
   $$\forall n \geq 1,\ \forall q \geq 1, \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$$
   En déduire, l'entier naturel q étant fixé, une suite (S'_n) de nombres rationnels telle que :
   $$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n' \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$$
   Expliciter S'_n lorsque $q = 2$.
   c. Ecrire un programme en Pascal calculant et affichant S'_n pour $q = 2$ pour une valeur de n saisie par l'utilisateur.

Corrigé exercice 10 (★)

Partie I

1. Convergence de la suite (J_p / I_p)
   a. La fonction sinus est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il en résulte que sa courbe est au dessus de toutes ses cordes, en particulier au dessus de la corde d'extrémités les points de coordonnées (0, 0) et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. La droite qui passe par ces deux points a pour équation

$y-0=\frac{2}{\pi}(t-0)$, c'est-à-dire $y=\frac{2}{\pi}t$. Dire que la courbe de la fonction sinus est au dessus de cette droite pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, se traduit par :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad \sin t\geq\frac{2}{\pi}t$$

la relation demandée en découle.

b. Les deux intégrale existent comme intégrales de fonctions continues sur un segment. La positivité de J_p est évidente (intégrale d'une fonction positive). Pour l'autre inégalité, on utilise celle démontrée dans la question précédente :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \left(t\leq\frac{\pi}{2}\sin t\right)\Rightarrow\left(J_p\leq\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^{2p}t\,dt\right)$$

On remplace $\sin^2 t$ par $1-\cos^2 t$ et on obtient :

$$J_p\leq\frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\cos^{2p}t\,dt\right)$$

On obtient bien la relation demandée :

$$0\leq J_p\leq\frac{\pi^2}{4}\left(I_p-I_{p+1}\right)$$

c. Tout étudiant doit connaître par cœur la méthode pour calculer les intégrales de Wallis.
On a :

$$I_{p+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p+1}t\cdot\cos t\,dt$$

On intègre par parties en posant :

$$u'(t)=\cos t\qquad u(t)=\sin t$$
$$v(t)=\cos^{2p+1}t\qquad v'(t)=-(2p+1)\sin t\cdot\cos^{2p}t$$

les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc écrire :

$$I_{p+1}=\left[\sin t\cdot\cos^{2p+1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\cdot\sin^2 t\,dt$$

On a $\cos\frac{\pi}{2}=\sin 0=0$, on en déduit

$$I_{p+1}=(2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\cdot\sin^2 t\,dt=(2p+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\cdot\cos^2 t\,dt\right)$$

c'est-à-dire,

$$I_{p+1}=(2p+1)\left(I_p-I_{p+1}\right)$$

Après transposition, on obtient :

$$I_{p+1}=\frac{2p+1}{2p+2}I_p$$

d. Nous savons que cette relation donne l'expression de I_p mais celle-ci n'est pas demandée. Des relations

$$0\leq J_p\leq\frac{\pi^2}{4}\left(I_p-I_{p+1}\right)\quad,\quad I_{p+1}=(2p+1)\left(I_p-I_{p+1}\right)\quad\text{et}$$

$$I_{p+1}=\frac{2p+1}{2p+2}I_p$$

on déduit :

$$0\leq J_p\leq\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{I_{p+1}}{2p+1}\qquad 0\leq J_p\leq\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2p+1}\cdot\frac{2p+1}{2p+2}I_p$$

Il en résulte que

$$0\leq\frac{J_p}{I_p}\leq\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2p+2}$$

et par le théorème d'encadrement, la suite (J_p/I_p) est convergente de limite 0.

2. Convergence et limite de la suite (S_n)

a. Faisons deux intégrations par parties successives sur I_p, ce qui se justifie par le fait que p étant supérieur ou égal à 1, la fonction $t\mapsto\cos^{2p}t$ est de classe C^2 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$I_p=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}t\,dt$$

On pose

$$u''(t)=1\qquad u'(t)=t\qquad u(t)=\frac{t^2}{2}$$
$$v(t)=\cos^{2p}t\qquad v'(t)=-2p\sin t\cdot\cos^{2p-1}t\qquad v''(t)=-2p\cos^{2p}t+2p(2p-1)\sin^2 t$$

De la relation quasi-évidente qu'on laisse le soin au lecteur de vérifier

$$\int_a^b u''(t)v(t)\,dt=\left[u'(t)v(t)-u(t)v'(t)\right]_a^b+\int_a^b u(t)v''(t)\,dt$$

on déduit :

$$I_p=\left[t\cdot\cos^{2p}t+pt^2\sin t\cdot\cos^{2p-1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-p\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cdot\cos^{2p}t\,dt+p(2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cdot\sin^2 t\cdot\cos^{2t}$$

On constate que $I_p=\left[t\cdot\cos^{2p}t+pt^2\sin t\cdot\cos^{2p-1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$ et, en remplaçant $\sin^2 t$

par $1-\cos^2 t$, que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^{2p-2} t\,dt = J_{p-1} - J_p$. Il s'ensuit que

$$I_p = -pJ_p + p(2p-1)(J_{p-1} - J_p)$$

c'est-à-dire :

$$I_p = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p$$

b. En remarquant que I_p n'est jamais nul (valeur de I_0 et relation de récurrence obtenue en question 1-d, par exemple), on peut diviser cette dernière relation par I_p,

$$p(2p-1)\frac{J_{p-1}}{I_p} - 2p^2\frac{J_p}{I_p} = 1$$

et utilisons $I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_p$ au rang précédent, c'est-à-dire $I_p = \dfrac{2p-1}{2p} I_{p-1}$:

$$2p^2(2p-1)\frac{J_{p-1}}{(2p-1)I_{p-1}} - 2p^2\frac{J_p}{I_p} = 1$$

Après simplification et transposition, on a bien la relation demandée :

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$$

c. On a immédiatement :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2} \quad , \qquad J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,dt = \frac{\pi^3}{24}$$

Et d'autre part,

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}\right) = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p^2} \quad ,$$

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p^2} = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{J_n}{I_n}$$

On multiplie par 2 et on passe à la limite ; comme la suite (J_p / I_p) est convergente de limite 0, il en résulte que

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Pour tout réel t strictement supérieur à 1, il existe un entier naturel $p \geq 1$ tel que :

$$\frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{(p+1)^2} \leq \int_p^{p+1}\frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{p^2}$$

En sommant de $n+1$ à N pour $1 \leq n+1 \leq N$, et de n à $N-1$:

$$\int_{n+1}^{N+1}\frac{1}{t^2}\,dt \leq R_n - R_N \leq \int_n^N \frac{1}{t^2}\,dt$$

On effectue les calculs et on fait tendre N vers $+\infty$:

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

par exemple, pour $n = 99$, l'erreur sur le résultat est de l'ordre de $1/100^{\text{ème}}$.

Partie II

1. Sommation de séries télescopiques

a. Montrons d'abord que Δ est linéaire. Soit f et g deux éléments de E et α un réel quelconque. On a, pour tout réel x strictement positif,

$$\Delta(\alpha f + g)(x) = (\alpha f + g)(x+1) - (\alpha f + g)(x)$$

$$\Delta(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x+1) + g(x+1) - \alpha f(x) - g(x)$$

$$\Delta(\alpha f + g)(x) = [\alpha f(x+1) - \alpha f(x)] + [g(x+1) - g(x)]$$

Finalement,

$$\Delta(\alpha f + g)(x) = \alpha\,\Delta f(x) + \Delta g(x)$$

Montrons maintenant que Δ est à valeurs dans E. Si f est continue sur $]0, +\infty[$ alors Δf l'est aussi comme différence de deux fonctions continues sur cet intervalle ($x+1 \in\,]0, +\infty[$). Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on en déduit immédiatement qu'on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \Delta f(x) = 0$; donc Δ est à valeurs dans E et donc Δ est un endomorphisme.

b. On a

$$\sum_{p=1}^{N}\Delta f(p) = \sum_{p=1}^{N}[f(p+1) - f(p)] = f(N+1) - f(1)$$

De cette relation et du fait que f a une limite nulle en $+\infty$, on en déduit que la série $\sum(\Delta f)(p)$ converge et que sa somme est :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\Delta f(p) = -f(1)$$

En remarquant que $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}\Delta f(p) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\Delta f(p) - \sum\limits_{p=1}^{n}\Delta f(p)$, on en déduit :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\Delta f(p) = -f(n+1)$$

c. On a :

$$\Delta f_{k-1}(x) = f_{k-1}(x+1) - f_{k-1}(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} - \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k-1)}$$

On factorise

$$\Delta f_{k-1}(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Delta f_{k-1}(x) = -\frac{k}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)(x+k)} = -kf_k(x)$$

d. On a k, entier naturel fixé supérieur ou égal à 1 et, pour tout réel x strictement positif,

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}\Delta f_{k-1}(x)$$

La convergence de la série de terme général $\Delta f_k(p)$ implique la convergence de la série de terme général $f_k(p) = -\frac{1}{k}\Delta f_{k-1}(p)$ puisque k ne dépend pas de p. De plus

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = -\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\Delta f_{k-1}(p) = -\frac{1}{k}\cdot\left(-f_{k-1}(n+1)\right)$$

En remplaçant $f_{k-1}(n+1)$ par son expression, on obtient la relation demandée :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k}f_{k-1}(n+1) = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

2. Accélération de convergence de (S_n) ;

a. Faisons une récurrence sur q à p quelconque fixé.

Initialisation : Pour $q = 1$, le premier membre de la relation à démontrer est :

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{1}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{1}{p^2} - f_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2(p+1)}$$

et le second membre est :

$$\frac{1!}{p}f_1(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$$

d'où la coïncidence pour $q = 1$.

Hypothèse de récurrence : On suppose que pour un en entier nature q quelconque fixé supérieur ou égal à 1,

$$\forall p \geq 1,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p)$$

Hérédité : On doit en déduire

$$\forall p \geq 1,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{(q+1)!}{p}f_q(p)$$

On écrit :

$$\forall p \geq 1,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p) - q!\,f_{q+1}(p) = \frac{q!}{p}f_q(p) - q!\,f_q$$

on réduit,

$$\forall p \geq 1,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{q!}{p}\cdot\frac{p+q+1}{p(p+1)\cdots(p+q)(p+q+1)} - q!\,f_{q+1}(p)$$

$$\forall p \geq 1,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{q!}{p}f_{q+1}(p)\left[(p+q+1) - p\right]$$

Finalement, on obtient la relation souhaitée :

$$\forall p \geq 1,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{(q+1)!}{p}f_q(p)$$

Conclusion :

$$\forall p \geq 1,\ \forall q \geq 1,\quad \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p)$$

b. Sommons la relation précédente de $n + 1$ à N pour $1 \leq n < N$;

$$\forall q \geq 1,\quad \sum_{p=n+1}^{N}\frac{1}{p^2} - \sum_{p=n+1}^{N}\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p) = \sum_{p=n+1}^{N}\frac{q!}{p}f_q(p)$$

Commençons par le second membre :

$$\sum_{p=n+1}^{N}\frac{q!}{p}f_q(p) \leq \frac{q!}{n+1}\sum_{p=n+1}^{N}f_q(p) \quad , \quad \sum_{p=n+1}^{N}\frac{q!}{p}f_q(p) \leq \frac{q!}{n+1}\sum_{p=n+1}^{N}f_q(p)$$

A la limite, quand N tend vers $+\infty$,

$$\sum_{p=n+1}^{N}\frac{q!}{p}f_q(p) \leq \frac{q!}{n+1}\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+q)}$$

Finalement,

$$\sum_{p=n+1}^{N}\frac{q!}{p}f_q(p) \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)} \qquad (1)$$

Continuons par le premier membre,

$$\sum_{p=n+1}^{N}\sum_{k=1}^{q}(k-1)!\,f_k(p) = \sum_{k=1}^{q}\sum_{p=n+1}^{N}(k-1)!\,f_k(p) = \sum_{k=1}^{q}(k-1)!\sum_{p=n+1}^{N}f_k(p)$$

A la limite lorsque N tend vers $+\infty$,

$$\sum_{p=n+1}^{N}f_k(p) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p) = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

Il s'ensuit donc,

$$\forall n \geq 1,\ \forall q \geq 1,\quad \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p) \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$$

C'est-à-dire,

$$\forall n \geq 1,\ \forall q \geq 1,\quad \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$$

D'autre part,

$$\frac{q!}{p}f_q(p) \geq 0 \Rightarrow \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \geq 0$$

Et donc

$$\forall n \geq 1,\ \forall q \geq 1, \quad 0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q}$$

c. On a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} - S_n$$

on en déduit donc,

$$\forall n \geq 1,\ \forall q \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q}$$

on pose

$$S'_n = S_n + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

On a alors

$$\forall n \geq 1,\ \forall q \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$$

par ailleurs, pour tout n entier naturel non nul, S_n est une somme de rationnels, donc S_n est un nombre rationnel ; pour tout entier naturel q strictement positif,

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

est un nombre rationnel comme somme de nombres rationnels ; il s'ensuit que S_n' est un nombre rationnel.

Lorsque $q = 2$ on obtient,

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \quad , \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

d. On peut par exemple écrire le programme suivant :

```
program essec_2001;

var
        k, n : integer;
        s    : real;

begin
        readln(n);
        s:=0;
        for k:=1 to n do s:=s+1/sqr(k);
        s:=s+1/(n+1)+1/(2*(n+1)*(n+2));
        writeln(s);
end.
```

On remarquera que l'erreur sur S obtenue en calculant S'_{99} est de l'ordre de $1/10^6$; c'est quand même bien meilleur que dans la première partie.

Exercice 11 (★)

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et t l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par $t(A) = {}^tA$ où ${}^tA$ désigne la transposée de A, c'est-à-dire la matrice $(a_{ji})_{1\leq i,\, j\leq n}$ si la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,\, j\leq n}$.(Autrement dit, la transposée d'une matrice s'obtient en permutant la $i^{\text{ème}}$ ligne avec la $i^{\text{ème}}$ colonne pour chaque valeur de i.)

1. Montrer que t est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que t est involutif, c'est-à-dire que $t \circ t = id$.
3. Montrer que quelles que soit les matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$,

   $$t(A \cdot B) = t(B) \cdot t(A).$$

   En déduire que A est inversible si, et seulement si, ${}^tA$ l'est aussi et que, dans ce cas:

   $${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

4. On dit que λ est une valeur propre d'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible.

   Montrer que λ est une valeur propre de A si, et seulement si, c'est une valeur propre de ${}^tA$.

5. Montrer que la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, sa transposée l'est aussi.

Corrigé exercice 11 (★)

1. Soit A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$, $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le n}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le n}$. Quel que soit le réel α, $t\left(\alpha A + B\right) = {}^t\left(\alpha A + B\right) = {}^t\left(\alpha a_{ij} + b_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le n}$

$$t\left(\alpha A + B\right) = \left(\alpha a_{ji} + b_{ji}\right)_{1\le i,\, j\le n} = \alpha\ t\left(A\right) + t\left(B\right)$$

Donc t est linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$; on dit aussi que t est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Quelle que soit la matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le n}$ de $M_n(\mathbb{R})$,

$$t\circ t\left(A\right) = t\left(\left(a_{ji}\right)_{1\le i,\, j\le n}\right) = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le n} = A .$$

Donc l'application $t\circ t$ est l'identité. Il en résulte que t est involutive.

3. Soit A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$, $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le n}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le n}$. La matrice

$A\cdot B$ est la matrice $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{1\le i,\, j\le n}$. On a donc

$$t\left(A\cdot B\right) = {}^t\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{1\le i,\, j\le n}$$

l'élément de la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de $t\left(A\cdot B\right)$ est $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$.

Par ailleurs, $t\left(B\right) = \left(b_{ji}\right)_{1\le i,\, j\le n}$ et $t\left(A\right) = \left(a_{ji}\right)_{1\le i,\, j\le n}$. La $i^{ème}$ ligne de

$t\left(B\right) = \left(b_{ji}\right)_{1\le i,\, j\le n}$ est la matrice ligne $\begin{pmatrix} b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{ni}\end{pmatrix}$ et la $j^{ème}$ colonne de

$t\left(A\right) = \left(a_{ji}\right)_{1\le i,\, j\le n}$ est la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn}\end{pmatrix}$ et donc l'élément de la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne du produit $t\left(B\right)\cdot t\left(A\right)$ est $\sum_{h=1}^{n} b_{hi}a_{jh}$

On a donc bien : $t\left(A\cdot B\right) = t\left(B\right)\cdot t\left(A\right)$.

Supposons A inversible, il existe une matrice B ($B = A^{-1}$) telle que $AB = BA = I$; de ce qui précède, on en déduit :

$$t\left(A\cdot B\right) = t\left(B\cdot A\right) = t\left(I\right) \Leftrightarrow t\left(B\right)\cdot t\left(A\right) = t\left(A\right)\cdot t\left(B\right) = I$$

Donc la transposée de A est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^tB = {}^t\left(A^{-1}\right)$

L'application t étant involutive, si ${}^tA$ est inversible alors, A l'est aussi.

4. Le réel λ est une valeur propre de A, si, et seulement si, $A-\lambda I$ est non inversible. Mais alors sa transposée est aussi non inversible, d'après la question précédente ; or on a la relation suivante ${}^t\left(A-\lambda I\right) = {}^tA - \lambda\, {}^tI = {}^tA - \lambda I$. Il en résulte que λ est une valeur propre de A, si, et seulement si, ${}^tA - \lambda I$ est non inversible et donc λ valeur propre de la transposée de A.

5. On dit qu'une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si il existe une matrice carrée P inversible, carrée d'ordre n, telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D. Alors $D = {}^tD = {}^t\left(\left(P^{-1}A\right)P\right) = {}^tP\ {}^t\left(P^{-1}A\right) = {}^tP\ {}^tA\ {}^t\left(P^{-1}\right)$. Mais ${}^t\left(P^{-1}\right) = \left({}^tP\right)^{-1}$ et donc

$D = {}^tP\ {}^tA\left({}^tP\right)^{-1}$. Comme ${}^tP$ est l'inverse de $\left({}^tP\right)^{-1}$, on ne déduit que ${}^tA$ est diagonalisable.

De même ; si ${}^tA$ est diagonalisable ; alors A l'est aussi.

Réponses au test

1) *Soit g la fonction définie par :*

$$g\left(x\right) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

On suppose démontré l'existence d'un unique réel x_1 tel que $g(x_1) = x_1$ et d'un unique réel x_0 tel que $e^{-x_0} = x_0$.

Montrer que $x_1 = x_0$.

<u>*Preuve*</u>

On recherche les réel x qui vérifient :

$$\frac{1+x}{1+e^x} - x = -x + e^{-x}$$

On réduit ;

$$1+x = e^{-x}\left(1+e^x\right)$$

et donc $e^{-x} = x$. On en déduit que $x = x_0$ et par suite :

$$\frac{1+x_0}{1+e^{x_0}} - x_0 = -x_0 + e^{-x_0} = 0$$

Il s'ensuit que $g(x_0) = x_0$ et donc $x_1 = x_0$.

Correction

En écrivant

$$\frac{1+x}{1+e^{x}} - x = -x + e^{-x}$$

on commet la faute de considérer à priori que ces deux expressions s'annule pour la même valeur de x ; on n'a pas lieu de s'émerveiller de constater qu'on ne se contredit pas. En fait, on a :

$$\frac{1+x_1}{1+e^{x_1}} - x_1 = -x_0 + e^{-x_0} = 0$$

Pour démontrer que $x_1 = x_0$, on remarque que x_1 est solution de l' équation $g(x) - x = 0$; ce qui donne :

$$\frac{1+x}{1+e^{x}} - x\frac{1+e^{x}}{1+e^{x}} = 0$$

soit

$$\frac{1-xe^{x}}{1+e^{x}} = 0$$

et donc, en multipliant les deux termes de la fraction par e^{-x},

$$\frac{e^{-x}-x}{e^{x}+1} = 0$$

La conclusion en découle.

2) *Si la dérivée f' d'une fonction f vérifie* $f'(a) = 0$ *alors, nécessairement,* $f''(a) = 0$.

Correction

L'erreur provient du fait qu'on a confondu la valeur de la dérivée en un point et la fonction dérivée elle même.

On a aucun mal a trouvé un contre-exemple :

$$f(x) = x^2$$

On a

$$f'(0)=0 \text{ et } f''(0)=2$$

3) *Pour qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I ait un extremum sur I en un point c, il faut que* $f'(c)=0$.

Correction

Cette affirmation est vraie si I est un intervalle ouvert mais fausse si l'intervalle I ne l' est pas, en particulier si I est fermé. A titre d'exemple, considérons la fonction f définie par $f(x)=x$ sur [0, 1] ; la dérivée de cette fonction n'est jamais nulle (toujours égale à 1), mais elle admet un maximum $f(1)$ et un minimum $f(0)$.

4) *Si X et Y sont deux variables aléatoires de même loi définies sur un même univers ; on a nécessairement X = Y.*

Correction

C'est faux : $X=Y$ est équivalent à $X-Y=0$; en général la variable $X-Y$ n'est pas la variable nulle.
Par exemple, on jette un dé deux fois de suite et on note X et Y les variables aléatoires égales au premier et au deuxième jet. Il est clair que la différence $X - Y$ n' est pas la variable nulle.

5) *Pour que A soit le carré d'une matrice B, il faut que tous les coefficients de A soient positifs.*

Correction

IL n'y a aucune raison ; prendre, par exemple,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

et A est le carré de la matrice :

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2$$

6) *Pour que AX = B ait une solution unique, il faut que A soit une matrice carrée.*

Correction

Non ; la matrice A doit avoir un nombre de lignes supérieur ou égal au nombre de colonnes ; pour avoir une solution unique, le système doit se réduire à un système de Cramer.
Par exemple :

$$\begin{cases}2x-3y=-1\\ x+\sqrt{2}y=0\\ -2x+3y=1\end{cases}$$

Ce système se réduit à un système de Cramer

$$\begin{cases}2x-3y=-1\\ x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$$