Mathématiques
voies S et E

Corrigés des épreuve de mathématiques s voies scientifique et

François Delaplace (voie E), **Pierre Girard** (voie S)
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème I

Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!}\sqrt{\pi}$.

1/4

s 2006
pécifiques à l'EM Lyon,
économique

Grandchamp (Versailles).

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad F(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

3. Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt) \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \cos(xt) \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \left| \sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a \right| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\; S'(x) = C(x)$.

4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} S(x)$.

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\; 2 \, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t$.

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad S(x) = \dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t \quad$ et $\quad C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t$.

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2 t^2} \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\quad g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2 t^2} \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

2.a. Montrer, pour tout $u \in [0\,; +\infty[$: $\; 0 \leqslant (1 - u + u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

2/4

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.
On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
On note $f^0 = \mathrm{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b. En déduire : $\quad \forall j \in [\![1; n-1]\!], \quad f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0\mathrm{id}$.

a. Vérifier : $\quad g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\quad \forall i \in [\![1; n]\!], \quad g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + \mathrm{I}_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3.a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0\,\mathrm{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.
Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P.
Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - x\mathrm{I}_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. *Application* 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. *Application* 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&4\\1&0&0&-8\\0&1&0&3\\0&0&1&2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^t C$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \dots, \mu_n$.

a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

Problème I

Préliminaires

1. a. On sait que pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $t^\alpha = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{\beta t})$, c'est ce qu'on appelle naïvement les « croissances comparées » ; En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $T^{\frac{n+2}{2}} = \underset{T\to+\infty}{o}(e^T)$ ce qui s'écrit : $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{T^{\frac{n+2}{2}}}{e^T} = 0$. En posant $t = \sqrt{T}$, on obtient donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{n+2}}{e^{t^2}} = 0$, c'est à dire

$$\boxed{t^n e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

b. Les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ étant convergente (coefficient > 1) et $t^n e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question précédente), on peut donc déduire du critère de négligeabilité des intégrales impropres que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente. Le changement de variable $u = -t$ appliqué à l'intégrale convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ prouve que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente ; enfin, par continuité de la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ sur $[-1; +1]$, on sait que $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^n e^{-t^2}\,dt$ existe. On déduit de tout cela que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$$

2. On vient de montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}\,dt$ converge. Soit alors n un entier naturel et $(a_0, \ldots, a_n)$ une suite de réels, on déduit de ce qui précède que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) e^{-t^2}\,dt$ converge. Ceci prouve que si P est un polynôme à coefficients réels, alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$$

3. a. Soient A et B deux réels, on intègre par parties $\displaystyle\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2}\,dt$ en utilisant les deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:
$u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\right) e^{-t^2}$ dont les dérivées sont : $u' : t \mapsto (n+1)t^n$ et $v' : t \mapsto te^{-t^2}$, on obtient immédiatement : $\displaystyle\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2}\,dt = \frac{-B^{n+1}e^{-B^2} + A^{n+1}e^{-A^2}}{2} + \frac{n+1}{2}\int_A^B t^n e^{-t^2}$ En utilisant le résultat du 1°a), et le résultat du 1°b) on voit que l'on peut faire tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n \text{ converge}}$$

b. Soit p un entier naturel et soit A un réel strictement positif, la fonction $t \mapsto t^{2p+1}e^{-t^2}$ est continue et impaire sur $[-A, +A]$ donc $\displaystyle\int_{-A}^{A} t^{2p+1} e^{-t^2}\,dt = 0$ et puisque cette intégrale a pour limite I_{2p+1} lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{I_{2p+1} = 0}$$

4. Par récurrence bien sûr ! La propriété est vrai pour $p = 0$ car c'est l'énoncé qui le dit... Supposons-la vraie pour un entier p quelconque, fixé et positif, on a alors :
$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2} I_{2p} = \dfrac{(2p+1)}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{2}\dfrac{(2p)!}{2(p+1)2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$
C'est à dire $I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi} = \dfrac{[2(p+1)]!}{2^{2(p+1)}(p+1)!}\sqrt{\pi}$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$.
Le théorème de récurrence permet donc de conclure que, pour tout entier naturel p,

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}}$$

Partie I

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t-x)^2(t-y)^2 = t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2+4xy+y^2)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2$
donc $(t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2} = t^4e^{-t^2} - 2(x+y)t^3e^{-t^2} + (x^2+4xy+y^2)t^2e^{-t^2} - 2xy(x+y)te^{-t^2} + x^2y^2e^{-t^2}$
et en intégrant les deux membres par rapport à la variable t, sachant que toutes les intégrales convergent d'après la question 2°) des préliminaires, on obtient :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2+4xy+y^2)I_2 - 2xy(x+y)I_1 + x^2y^2I_0$ On peut alors utiliser le résultat de la question 3°)c) des préliminaires, cela donne :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{3}{4} - 2(x+y)0 + (x^2+4xy+y^2)\frac{1}{2} - 2xy(x+y)0 + x^2y^2\right]\sqrt{\pi}$
c'est à dire :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{3}{4} + (x^2+4xy+y^2)\frac{1}{2} + x^2y^2\right]\sqrt{\pi}}$$

2. D'après ce qui précède, F est une fonction polynôme ; elle est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et elle a donc des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 qui sont :
$\dfrac{\partial F}{\partial x} : (x, y) \mapsto x + 2y + 2xy^2$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y} : (x, y) \mapsto 2x + y + 2x^2y$

3. On sait que, F étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, tout extremum de F ne pourra être obtenu qu'en un point critique de F. On est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 2xy^2 &= 0 \\ 2x + y + 2x^2y &= 0 \end{cases}$$

On constate que dans ce système, $(x = 0) \Leftrightarrow (y = 0)$ et que $(x, y) = (0, 0)$ est une solution particulière de ce système. On cherche les autres solutions de ce système, c'est à dire qu'on suppose maintenant que $x \neq 0$ et $y \neq 0$; En multipliant la première ligne par x et la seconde par y on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1) \\ 2xy+y^2+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1) \\ x^2 &= y^2 \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

On note alors qu'on ne peut avoir $x=y$ car sinon (L_1) devient $x^2(3+2x^2)=0$ qui n'est pas possible pour $x\neq 0$ Un système équivalent est donc :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1) \\ x &= -y \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} -x^2+2x^4 &= 0 \quad (L_1) \\ x &= -y \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

et puisque $x\neq 0$:

$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{1}{2} \quad (L_1) \\ x &= -y \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

les points critiques de F sont donc, en rajoutant la solution $(0,0)$:

$$\boxed{(0,0);(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}});(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}$$

F étant de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on sait que l'on peut tester si ces points sont des abscisses d'extrema en calculant le célèbre « $rt-s^2$ »où, en tout point (x,y) on a :
$r=\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}(x,y)=1+2y^2,\ s=\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=2+4xy; t=\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}(x,y)=1+2x^2.$
On peut résumer les résultats dans un tableau :

	r	s	t	$rt-s^2$
(0,0)	1	2	1	-1
$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$	2	0	2	4
$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	2	0	2	4

Compte tenu du signe de $rt-s^2$ et du signe de r, on déduit que $(0,0)$ est un point selle de F et que :

$$\boxed{F \text{ présente un minimum local en } (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et en } (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ dont la valeur commune est } \frac{1}{2}}$$

Partie II

1. Pour tout réel x, les fonctions $t\mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ et $t\mapsto t\cos(xt)e^{-t^2}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $|\sin(xt)e^{-t^2}|\leqslant e^{-t^2}$ et $|t\cos(xt)e^{-t^2}|\leqslant te^{-t^2}$. Mais d'après le 2°) des préliminaires, on sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}\,dt$ convergent, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\,dt$ convergent. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet alors de conclure que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt$ convergent absolument et sont donc convergentes.

2. Soit $a\in\mathbb{R}$; Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h:t\mapsto\sin(a+t)$. Cette fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $|h"(t)|=|-\sin(a+t)|\leqslant 1$; on peut donc appliquer, pour tout réel λ la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour h entre 0 et λ : $|g(\lambda)-g(0)-g'(0).\lambda)|\leqslant 1.\dfrac{|\lambda-0|^2}{2}$, c'est à dire :

$$\boxed{|\sin(a+\lambda)-\sin(a)-\cos(a).\lambda)|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}}$$

3. a. $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall h\in\mathbb{R}$, appliquons ce résultat en remplaçant a par xt et λ par xh ; on obtient : $|\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)|\leqslant\dfrac{x^2h^2}{2}$ et puisque toutes les intégrales convergent :

$$\begin{aligned}|S(x+h)-S(x)-hC(x)| &= |\int_0^{+\infty}\sin((x+h)t)\,e^{-t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}ht\cos(xt)e^{-t^2}\,dt| \\ &= |\int_0^{+\infty}[\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)]\,e^{-t^2}\,dt| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}|\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)|e^{-t^2}\,dt \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{x^2h^2}{2}e^{-t^2}\,dt \text{ (cette intégrale converge bien !)} \\ &\leqslant \frac{x^2h^2\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $h\neq 0$: $\left|\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)\right|\leqslant\dfrac{x^2|h|\sqrt{\pi}}{4}$, ce qui prouve, par le théorème d'encadrement des limites, que :

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)=0}$$

b. Bien sûr, il s'en suit que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=C(x)$; la fonction S est donc dérivable en tout réel x avec :

$$\boxed{S'(x)=C(x)}$$

4. a. Intégrons par parties l'intégrale $C(x)$ à l'aide des fonctions de classe C^1 $u:t\mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v:t\mapsto\cos(xt)$, cela donne : $\forall A\in\mathbb{R}^+$,
$\displaystyle\int_0^A t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt=\int_0^A u'(t)v(t)\,dt=[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\cos(xt)]_0^A-\frac{x}{2}\int_0^A\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$
La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et la fonction $t\mapsto\cos(xt)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\lim_{A\to+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)=0$$

Les intégrales dans les deux membres ont des limites lorsque $A\to\infty$ d'après II.1., on obtient donc :

$$\int_0^{+\infty}t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt=[\frac{1}{2}e^0\cos(0)]-\frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$$

c'est à dire :

$$C(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}S(x)$$

b. La fonction $x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\begin{aligned} x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{x}{2}S(x)+S'(x)\right) &= 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{x}{2}S(x)+C(x)\right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{x}{2}S(x)+\frac{1}{2}-\frac{x}{2}S(x)\right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{4}} \end{aligned}$$

Ce que l'on peut résumer sous la forme

$$\left(2e^{\frac{t^2}{4}}S(t)\right)' = e^{\frac{t^2}{4}}$$

Les fonctions dans étant continues sur $\mathbb{R}$, on peut les intégrer sur $[0,x]$ pour x fixé dans $\mathbb{R}^+$. Cela donne :

$$2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) - 2e^{\frac{0^2}{4}}\underbrace{S(0)}_{=0} = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$$

Soit enfin $\boxed{2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt}$

c. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$, on obtient : $\boxed{S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt}$

et en reportant dans l'égalité du 4.a. : $\boxed{C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt}$

Partie III

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \frac{1}{1+x^2t^2} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2} \leqslant e^{-t^2}$, les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge d'après le préliminaire ; ainsi, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet de conclure que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,dt$ converge.

2. a. $\forall u \in \mathbb{R}^+$, $(1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}$; or $0 \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1$ donc :

$$\boxed{0 \leqslant (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leqslant u^3}$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, x^2t^2 \geqslant 0$; en en déduit immédiatement en posant $u = x^2t^2$ et en multipliant les 3 membres de l'inégalité par e^{-t^2} que :

$0 \leqslant (1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2} \leqslant x^6t^6e^{-t^2}$. Mais les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6t^6e^{-t^2}\,dt$ convergent d'après le préliminaire et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,dt$ converge d'après la question précédente. On peut donc intégrer l'encadrement sans changer le sens des inégalités, ce qui donne :

$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,dt \leqslant x^6\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^6e^{-t^2}\,dt}_{I_6}$ c'est à dire, compte tenu du 3.c. du préliminaire : $\boxed{0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,dt - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6}$

3. Et puisque toutes les intégrales en présence sont convergentes, on obtient en utilisant la linéarité de l'intégration :

$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - x^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt + x^4\int_{-\infty}^{+\infty} t^4e^{-t^2}\,dt - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$, c'est à dire :

$0 \leqslant I_0 - x^2I_2 + x^4I_4 - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$ ou encore : $0 \leqslant \sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right) - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$.

On divise alors, pour $x \neq 0$ les trois membres de cet encadrement par $|x^5|$ et on obtient

$$0 \leqslant \left|\frac{\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right)-g(x)}{x^5}\right| \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}|x|$$

il s'en suit que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right)-g(x)}{x^5} = 0$ que l'on peut écrire :

$$\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right) - g(x) = o(x^5)$$

ou enfin

$$\boxed{g(x) = \sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}+0.x^5\right)+o(x^5)}$$

qui est, par définition, **le** développement limité à l'ordre 5 de g en 0.

Partie IV

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}$, $(2p)! \leqslant t^2+(2p)!$ donc $0 \leqslant \frac{1}{t^2+(2p)!} \leqslant \frac{1}{(2p)!}$ et puisque $t^{2p} \geqslant 0$:

$0 \leqslant \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{(2p)!}t^{2p}e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p}e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2}\,dt$ converge d'après les préliminaires. Donc, d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues, $\boxed{\text{l' intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$

2. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{(2p)!}t^{2p}e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p}e^{-t^2}$ étant continues sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ étant convergentes, on en déduit que :

$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{(2p)!}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2}\,dt$ d'où enfin : $\boxed{0 \leqslant u_p \leqslant \frac{I_{2p}}{(2p)!}}$. En utilisant le résultat des préliminaires, on en déduit que $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$ que l'on écrit : $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}\sqrt{\pi}$.

On utilise alors le fait que la série de terme général $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}$ est convergente (de somme $e^{\frac{1}{4}}$) et le critère de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que $\boxed{\sum_{p\geqslant 0} u_p \text{ est convergente}}$

Problème II

1. a. Par lecture de la matrice on a : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]\ f(e_i) = e_{i+1}$

   b. Raisonnons par récurrence : Posons $\forall j \in [\![1, n-1]\!]\ P(j) =$« $f^j(e_1) = e_{j+1}$ ». $P(1)$ est vraie d'après le 1.a. Supposons que pour un entier $j \in [\![1, n-2]\!]$ la proposition $P(j)$ soit vraie. Alors $f^{j+1}(e_1) = f\left(f^j(e_1)\right) = f(e_{j+1}) = e_{j+2}$. Ce qui prouve que $P(j+1)$ est vraie. Le théorème de récurrence (finie) prouve alors que la proposition est vraie pour tout entier j de $[\![1, n-1]\!]$.
   On en déduit : $f^n(e_1) = f\left(f^{n-1}(e_1)\right) = f(e_n) = -(a_0e_1 + \ldots + a_{n-1}e_n)$ (par lecture directe de la matrice)

2. a. On a donc :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= f^n(e_1) + a_{n-1}f^{n-1}(e_1) + \ldots + a_1 f(e_1) + a_0 e_1 \\ &= -(a_0e_1 + \ldots + a_{n-1}e_n) + a_{n-1}e_n + \ldots + a_1e_2 + a_0e_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   b. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, g et f^i sont des polynômes de l'endomorphisme f et on sait que deux polynômes d'un même endomorphisme commutent ; On peut donc affirmer que :

$$\boxed{g \circ f^i = f^i \circ g}$$

   c. Ainsi, pout tout $i \in [\![2, n]\!]$, $i - 1 \in\ [\![1, n-1]\!]$ donc

$$\begin{aligned} g(e_i) &= g\left(f^{i-1}(e_1)\right) \\ &= g \circ f^{i-1}(e_1) = f^{i-1} \circ g(e_1) \\ &= f^{i-1}(0) = 0 \end{aligned}$$

   d. L'endomorphisme $P(f)$, c'est à dire g, s'annule pour tous les éléments de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, c'est donc l'endomorphisme nul et cela prouve que $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de} f}$.
   Considérons alors le cas particulier où $n = 5$ et où $P(X) = X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$. La matrice compagnon de P est, par définition : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ D'après ce qui précède, P est un polynôme annulateur de A donc $P(A) = 0$ et donc

$$\boxed{A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5}$$

   e. Un théorème nous permet d'affirmer que les valeurs propres d'une matrice sont <u>des</u> racines de tout polynôme annulateur de cette matrice. On peut donc dire que les valeurs propres de A sont <u>des</u> racines du polynôme P.

3. a. $Q(f)(e_1) = \alpha_0e_1 + \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_{n-1}f^{n-1}(e_1) = \underline{\alpha_0e_1 + \alpha_1e_2 + \ldots + \alpha_{n-1}e_n}$

   b. Raisonnons par l'absurde : S'il existait un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui soit un polynôme annulateur de A, il pourrait s'écrire sous la forme du polynôme Q de la question précédente et on aurait donc en particulier :

$$Q(f)(e_1) = \alpha_0e_1 + \alpha_1e_2 + \ldots + \alpha_{n-1}e_n = 0$$

   mais la famille $e_1, e_2, \ldots, e_n$ est une famille libre (base) donc on aurait :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$$

   et donc Q serait le polynôme nul, ce qui n'est pas possible par hypothèse.
   <u>Conclusion : il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à $n-1$</u>

   c. $P(f) = 0$ donc, en posant $K(X) = X - \lambda$: $(KR)(f) = 0$ c'est à dire $K(f) \circ R(f) = 0$ c'est à dire enfin :

$$\boxed{(f - \lambda id) \circ R(f) = \tilde{0}}$$

   d. Raisonnons par l'absurde : Supposons qu'une racine de P, λ, ne soit pas une valeur propre de f. Alors $f - \lambda id$ serait un endomorphisme injectif, donc bijectif, de $\mathbb{C}^n$ (qui est bien de dimension finie). Ainsi l'égalité $(f - \lambda id) \circ R(f) = \tilde{0}$ conduirait, par composition des deux membres par $(f - \lambda id)^{-1}$, à $R(f) = \tilde{0}$ et cela prouverait que le polynôme R, qui est de degré $\leqslant n-1$ car P est de degré $\leqslant n$, est un polynôme annulateur de f, ce qui est faux d'après la question 3.b.
   <u>Conclusion : Toutes les racines de P sont des valeurs propres de f</u>

   Remarque : Compte tenu de 2.e. on a donc prouvé que <u>les</u> racines de P sont <u>les</u> valeurs propres de f.

4. a. Soit $x \in \mathbb{C}$, $C - xI_n = \begin{pmatrix} -x & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} - x \end{pmatrix}$
   Les $n-1$ premières colonnes de cette matrice sont clairement indépendantes et cela prouve que :

$$\boxed{rg(C - xI_n) \geqslant n - 1}$$

   Le théorème du rang nous permet d'affirmer que

$$\dim \ker(C - xI_n) = n - rg(C - xI_n) \leqslant \underbrace{n - (n-1)}_{1}$$

   Mais si x est une valeur propre de C alors $\ker(C - xI_n)$ est le sous-espace propre de C associé à la valeur propre x et est donc de dimension $\geqslant 1$. Ainsi $1 \leqslant \dim\ker(C - xI_n) \leqslant 1$ et donc :
   <u>Tous les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.</u>

   b. C est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n. Notons q le nombre de ses valeurs propres : cela se traduit par $q \times 1 = n$. Ainsi C est diagonalisable si et seulement si elle a n valeurs propres distinctes, c'est à dire d'après 3.d. :

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable si et seulement si } P \text{ a } n \text{ racines deux à deux distinctes}}$$

5. a. La matrice A_1 est la matrice compagnon du polynôme $P_1(X) = X^4 - 1$ qui a 4 racines complexes deux à deux distinctes : les 4 racines $4^{\text{ème}}$ de l'unité ; D'après la question précédente, on peut donc affirmer que <u>A_1 est diagonalisable</u>.

   b. La matrice A_2 est la matrice compagnon du polynôme

$$P_2(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4 = (X-2)(X+2)(X-1)^2$$

   qui a une racine double.
   D'après la question précédente, on peut donc affirmer que <u>A_2 n'est pas diagonalisable</u>.

6. a. On sait qu'une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est (il est utile de connaître la preuve !) donc ici la matrice $B - tI_n$ est inversible si et seulement si ${}^t(B - tI_n)$ l'est c'est à dire si et seulement si ${}^tB - t\,{}^tI_n = C - tI_n$ est inversible.

   b. Soit t un nombre réel. t est valeur propre de B si et seulement si $B - tI_n$ n'est pas inversible c'est à dire, d'après ce qui précède, si et seulement si $C - tI_n$ n'est pas inversible, c'est à dire enfin : t est valeur propre de B si et seulement si t est valeur propre de C. Ainsi <u>B et C ont les mêmes valeurs propres</u>.

c. Résolvons le système $(B-\lambda I_n)X=0$ où $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$ Cela s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda x_1+x_2 & = & 0\\ -\lambda x_2+x_3 & = & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_0x_1-a_1x_2-\ldots-a_{n-2}x_{n-1}-(a_{n-1}-\lambda)x_n & = & 0\end{array}\right.$$

Les $n-1$ premières équations sont équivalentes à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & \lambda x_1\\ x_3 & = & \lambda^2 x_1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n & = & \lambda^{n-1}x_1\end{array}\right.$$

et en remplaçant dans la dernière équation, cela donne : $-\underbrace{P(\lambda)}_{=0}x_1=0$. Ainsi le sous espace propre associé à une valeur propre λ de B est $Vect\left[\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}\right]$

d. Si P a n racines distinctes alors C a n valeurs propres distinctes d'après 4.b. et donc, d'après 6.b., B a n valeurs propres distinctes et par conséquent, B est diagonalisable. $\mathbb{C}^n$ est donc somme directe des sous-espaces propres de$B$ et en concaténant les bases de chacun des sous-espaces propres, on obtient une base de vecteurs propres et la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à cette base est, d'après le c., V. Ceci prouve que V, en tant que matrice de passage d'une base à une autre, est inversible.

7. a. $a=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n$ donc les coordonnées de a dans la base $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ sont : $\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$

$u(a)=u(\varepsilon_1)+\cdots+u(\varepsilon_n)=\mu_1\varepsilon_1+\cdots+\mu_n\varepsilon_n$ donc les coordonnées de $u(a)$ dans la base $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ sont : $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$. De même, pour $j\in[\![1,n-1]\!]$, $u^j(a)=\mu_1^j\varepsilon_1+\cdots+\mu_n^j\varepsilon_n$ donc les coordonnées de $u^j(a)$ dans la base $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ sont : $\begin{pmatrix}\mu_1^j\\ \mu_2^j\\ \vdots\\ \mu_n^j\end{pmatrix}$ Ainsi la matrice de la famille B_a dans la base $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ est la même matrice que la matrice V en remplaçant $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ par $\mu_1,\cdots,\mu_n$ qui est inversible d'après la question 6.d. Et le fait que la matrice de la famille B_a dans la base $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ est inversible prouve que B_a est une base de E.

b. Notons $(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})$ les coordonnées de $u^n(a)$ dans la base B_a.
$u(a)=0a+1u(a)+0u^2(a)\cdots+0u^{n-1}(a)$,
$u[u(a)]=0a+0u(a)+1u^2(a)\cdots+0u^{n-1}(a)$,
$\cdots$,
$u[u^{n-1}(a)]=\alpha_0a+\cdots+\alpha_{n-1}u^{n-1}(a)$ donc la matrice de u dans la base B_a est :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & 0 & \alpha_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}$$

qui est la matrice compagnon du polynôme :

$$\boxed{P(X)=X^n-\alpha_{n-1}X^{n-1}-\cdots-\alpha_1X-\alpha_0}$$

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les trois matrices de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b. Déterminer une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$.

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que : $AM = MD$.

2.a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$.

c. Établir que (U, A) est une base de E.

d. Calculer le produit UA. Est-ce que UA est élément de E ?

3. On note $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour toute $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, par :
$$f(M) = AM - MD.$$

a. Vérifier que f est linéaire.

b. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

c. Quelle est la dimension de l'image de f ?

d. Déterminer les matrices M de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.
En déduire que 1 est valeur propre de f.
Montrer que -1 est aussi valeur propre de f.

e. Est-ce que f est diagonalisable ?

f. Montrer : $f \circ f \circ f = f$.

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6).$$

1.a. Montrer que $(4,2)$ et $(2,3)$ sont des points critiques de F.

b. Est-ce que F présente un extrémum local au point $(4,2)$?
Est-ce que F présente un extrémum local au point $(2,3)$?

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = x(x-2)(2x-5).$$

a. Montrer : $\quad \forall\, x \in [4\,;+\infty[,\quad (x-2)(2x-5) \geqslant 4.$

b. En déduire : $\quad \forall\, x \in [4\,;+\infty[,\quad \varphi(x) \geqslant 4x \quad \text{et} \quad \varphi(x) \in [4\,;+\infty[.$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = F(1+u_n, u_n).$$

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ.

b. Montrer : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant 4^{n+1}.$
Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

c. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{10}$.

4. On note $g : [4\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4\,;+\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

b. Trouver trois réels a, b, c tels que :

$$\forall\, x \in [4\,;+\infty[,\quad g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}.$$

c. Calculer $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

a. Rappeler l'expression d'une densité de U.

b. En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \forall\, x \leqslant 0, & F(x) = 0 \\ \forall\, x > 0, & F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}. \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité f.

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et que $\mathrm{E}(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b. Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $\mathrm{P}(X^2 \leqslant y)$. *On distinguera les cas* $y \leqslant 0$ *et* $y > 0$.

c. Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire que X admet une variance $\mathrm{V}(X)$ et calculer $\mathrm{V}(X)$.

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{P}(Z = k) = p\,(1-p)^{k-1}$.
Rappeler la valeur de l'espérance $\mathrm{E}(Z)$ et celle de la variance $\mathrm{V}(Z)$ de la variable aléatoire Z.

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2 et n variables aléatoires indépendantes $Z_1,\ Z_2, \ldots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

a. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\Big(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n\Big)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

Exercice 1

On considère les matrices

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

1\. a) La matrice A est triangulaire supérieure ; ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale. Ainsi A a deux valeurs propres 0 et 1.

b) A est une matrice carrée d'ordre 2 et possède deux valeurs propres réelles. Donc A est diagonalisable, et il existe une matrice inversible P telle que $A=P.D.P^{-1}$.
Déterminons les espaces propres F_0 et F_1 respectivement associés aux valeurs propres 0 et 1 de A. Notons Id la matrice identité d'ordre 2 . L'espace propre F_0 est l'ensemble des vecteurs colonnes $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ tels que $A.X=0$; après calcul, on obtient :

$$\begin{bmatrix}y\\y\end{bmatrix}=0 \qquad (2)$$

et donc $y=0$; ainsi, $F_0=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$.

De même, l'espace propre F_1 est l'ensemble des vecteurs colonnes $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ tels que $(A-Id).X=0$; après calcul, on obtient :

$$\begin{bmatrix}-x+y\\0\end{bmatrix}=0 \qquad (3)$$

et donc $x=y$; ainsi, $F_1=\left\{\begin{bmatrix}y\\y\end{bmatrix} / y\in\mathbb{R}\right\}$.

Une base de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est donnée par : $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$.

La matrice P s'écrit donc : $P=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$.

2\. a) La matrice nulle, carrée d'ordre 2, qu'on notera ici N_2, est un élément de E car $A.N_2=N_2.D=N_2$. Il s'ensuit que E n'est pas l'ensemble vide.
Soit M_1, M_2 deux éléments de E et α un réel ;
$A.(\alpha\cdot M_1+M_2)=\alpha\cdot A.M_1+A.M_2=\alpha\cdot M_1.D+M_2.D=(\alpha\cdot M_1+M_2).D$.
Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $M=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$. On a : $A.M-M.D=\begin{bmatrix}z&t-y\\z&0\end{bmatrix}$. La matrice M est élément de E si, et seulement si, $A.M-M.D=N_2$, donc si, et seulement si, $z=0$ et $y=t$.

c) Remarquons d'abord que :
d'une part, $A.U=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ et $U.D=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ et que d'autre part, $A^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ et $A.D=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$. Donc les matrices U et A sont éléments de E.
Dans la question précédente, on a monté que
$E=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\0&y\end{bmatrix} / x,y\in\mathbb{R}\right\}=\{x\cdot U+y\cdot A \,/\, x,y\in\mathbb{R}\}$. Il en résulte que la famille (U,A) est une famille génératrice de E. Par ailleurs, $x\cdot U+y\cdot A=N_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x&y\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ et donc $x=y=0$. Ainsi, la famille (U,A) est aussi une famille libre de E et par suite, constitue une base de E.

d) On calcule : $U.A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$. On a $A.(U.A)=(A.U).A=0.A=0$ et $(U.A).D=U.(A.D)=U.A\neq 0$. Il s'ensuit que la matrice $U.A$ n'est pas élément de E.

3\. a) Quel que soit M_1, M_2 matrices carrées réelles d'ordre 2 et quel que soit le réel α,
$f(\alpha\cdot M_1+M_2)=A.(\alpha\cdot M_1+M_2)-(\alpha\cdot M_1+M_2).D$
$f(\alpha\cdot M_1+M_2)=\alpha\cdot(A.M_1-M_1.D)+(A.M_2-M_2.D)$
et donc $f(\alpha\cdot M_1+M_2)=\alpha\cdot f(M_1)+f(M_2)$. Ainsi, f est linéaire. On vérifie de plus, que si M est carrée réelle d'ordre 2, alors $f(M)$ est aussi carrée réelle d'ordre 2 comme différence de produits de matrices carrées réelles d'ordre 2. Donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Le noyau de f est l'ensemble de toutes les matrices carrées réelles d'ordre 2 vérifiant

$A.M-M.D=N_2$. D'après la question 2, il s'agit de E et sa dimension est 2.

c) D'après le théorème du rang, $dim(\Im(f)) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - dim(E) = 4-2=2$.

d) Soit $M=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. On a $f(M)=M$ si,et seulement si, $A.M-M.D-M=N_2$; c'est à dire, après réduction ,si, et seulement si, $\begin{bmatrix} z-x & t-2y \\ 0 & -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il s'ensuit que x, y, z et t sont solutions du système :

$$\begin{cases} z-x=0 \\ t-2y=0 \\ -t=0 \end{cases}$$

Sans prendre le risque d'être trop rapide dans les calculs, on peut conclure que $z=x$ et $t=y=0$; l'ensemble des solutions de ce système n'étant pas réduit à l'unique solution $x=y=z=t=0$, 1 est valeur propre de f et l'espace propre E_1 de f associé à la valeur propre 1 est donc $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} / \ x \in \mathbb{R} \right\}$.

De même, on a $f(M)=-M$ si,et seulement si, $A.M-M.D+M=N_2$; c'est à dire, après réduction ,si, et seulement si, $\begin{bmatrix} z+x & t \\ 2z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il s'ensuit que x, y, z et t sont solutions du système :

$$\begin{cases} z+x=0 \\ 2z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

Là encore, on peut conclure rapidement : $x=z=t=0$ et y est quelconque. Il s'ensuit que -1 est aussi valeur propre de f et que son espace propre associé est

$E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} / \ y \in \mathbb{R} \right\}$.

E_1 et E_{-1} sont chacun de dimension 1, car engendré repectivement par un seul vecteur non nul. Par ailleurs, d'après la question 3.b), E est le noyau de f donc f admet 0 comme valeur propre et E comme espace propre associé.

On a $dim(E_1) + dim(E_{-1}) + dim(E) = dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, c''est à dire que la somme des dimensions des espaces propres de f est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc f est diagonalisable.

e) Posons $V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Les familles (V_1) et (V_2) sont respectivement des bases de E_1 et E_{-1} . Dans la base (U, A, V_1, V_2) , la matrice de f s'écrit :

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Un calcul rapide nous montre que :

$$M_f^3 = \begin{bmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = M_f$$

Les deux endomorphismes f^3 et f ont les mêmes matrices dans les mêmes bases, donc ils sont égaux.

Exercice 2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x, y) \to F(x, y) = (x-1)\ (y-2)\ (x+y-6)$$

On reconnaît là une fonction polynôme, donc une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Pour qu'aux points $(4, 2)$ et $(2, 3)$, la fonction F admette un extremum, il faut que ces points soient des points critiques ; d'où l'objet de la première question.

1.a) Calcul des dérivées partielles :

$$p := \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = (y-2)\ (x+y-6) + (x-1)\ (y-2)$$

$$q := \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = (x-1)\ (x+y-6) + (x-1)\ (y-2)$$

On calcule p et q pour $x=4, y=2$ puis pour $x=2, y=3$. Dans les deux cas on obtient 0. Ce qui implique que les deux points $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques.

b) Déterminons les dérivées partielles d'ordre 2 ; pour chaque valeur du couple (x, y) , on a :

$$r := \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y) = 2y - 4 \qquad s := \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} F(x, y) = 2x + 2y - 9$$

$$t := \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y) = 2x - 2$$

On calcule $r \cdot t - s^2$ pour $x = 4, y = 2$; on obtient : $r \cdot t - s^2 = -9$; il s'ensuit que $F(4, 2)$ n'est pas un extremum.

On calcule $r \cdot t - s^2$ pour $x = 2, y = 3$; on obtient : $r \cdot t - s^2 = 3$; il s'ensuit que $F(4, 2)$ est un extremum ; par ailleurs, pour $x = 2, y = 3$, $r = 2$, donc $F(4, 2) = 0$ est un minimum local.

2. a) Il faut vraiment être très maladroit en calcul pour ne pas obtenir les inégalités demandées :

$x \geq 4 \;\Rightarrow\; (x-2 \geq 2 \;\; et \;\; 2 \cdot x - 5 \geq 3)$

$(x-2 \geq 2 \;\; et \;\; 2 \cdot x - 5 \geq 3) \;\Rightarrow\; (x-2) \cdot (2 \cdot x - 5) \geq 6 \geq 4$

Par transitivité de l'implication, $x \geq 4 \Rightarrow (x-2) \cdot (2 \cdot x - 5) \geq 4$.

b) Le réel x étant supérieur ou égal à 4, il est supérieur ou égal à 1, et donc,

$x \geq 4 \Rightarrow x \cdot (x-2) \cdot (2 \cdot x - 5) \geq 4 \cdot x \geq 4$.

3. a) On remplace x par $1 + u_n$ et y par u_n dans $F(x, y)$. Immédiatement $u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n)$ donne :

$$u_{n+1} = u_n \, (u_n - 2) \, (-5 + 2 \, u_n) \tag{4}$$

Tout le monde a reconnu $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

b) Par récurrence : $u_0 = 4 \geq 4$; si, pour un $n \geq 0$, $u_n \geq 4^{n+1}$ alors $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq 4 \cdot u_n \geq 4 \cdot 4^{n+1}$ et donc $u_{n+1} \geq 4^{n+2}$.

Il en résulte que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 4^{n+1}$.

Ce qui vient d'être démontré prouve d'une part que pour tout n , $\frac{1}{u_n}$ existe et est strictement positif, et d'autre part que $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{4^{n+1}}$, terme général d'une série géométrique convergente car de raison $\frac{1}{4} \in \left]-1, 1\right[$.

D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente.

c) On peut être tenté d'utiliser la question précédente en disant qu'il suffit que $4^{n+1} \geq 10^{10}$ pour que $u_n \geq 10^{10}$, ce qui est vrai, mais ça ne répond pas à la question. On nous demande le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^{10}$. La question 3 b) nous permet toutefois de garantir l'existence d'un tel entier.

```
program lyon_06;
var
  n : integer;
  u : real;

Begin
 u:=4;  n:=0;
 while  u < 10000000000 do
   begin
     u:=u*(u-2)*(2*u-5);
     n:=n+1;
   end;
 writeln(n);
End.
```

3. a) La fonction g définie sur $[4, +\infty[$ est continue comme fonction rationnelle définie sur cet intervalle. D'autre part, quel que soit le réel x de $[4,+\infty[$, $\varphi(x)$, et donc aussi $g(x)$, est positive. Enfin, $g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{10}{2 \cdot x^3} = \frac{5}{x^3}$. Or $\int_4^{+\infty} \frac{5}{x^3} \, dx$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_4^{+\infty} g(x) \, dx$ converge.

b) Réduisons au même dénominateur $\frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2 \cdot x - 5}$; après développement on obtient :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2 \cdot x - 5} = \frac{2 \, a \, x^2 - 9 \, a \, x + 10 \, a + 2 \, b \, x^2 - 5 \, b \, x + c \, x^2 - 2 \, c \, x}{x \, (x-2) \, (2 \, x - 5)}$$

Ce qui se réduit en :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2 \cdot x - 5} = \frac{(2 \, b + 2 \, a + c) \, x^2 + (-5 \, b - 9 \, a - 2 \, c) \, x + 10 \, a}{x \, (x-2) \, (2 \, x - 5)}$$

Et, $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2 \cdot x - 5}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 2 \cdot a + 2 \cdot b + c = 0 \\ 9 \cdot a + 5 \cdot b + 2 \cdot c = 0 \\ 10 \cdot a = 10 \end{cases}$$

La dernière équation nous donne $a = 1$ et en remplaçant a par cette valeur dans les deux autres équations on obtient un sytème de deux équations à deux inconnues ;

$$\begin{cases} 2 \cdot b + c = -2 & (L_1) \\ 5 \cdot b + 2 \cdot c = -9 & (L_2) \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$:

$$\begin{cases} 2 \cdot b + c = -2 & (L_1) \\ b = -5 & (L_2) \end{cases}$$

Et par suite $c = 8$; ainsi, $g(x) = \dfrac{8}{2x-5} - \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{1}{x}$.

c) Une primitive de g est, par exemple : $G : t \rightarrow 4 \ln(2t-5) - 5 \ln(t-2) + \ln(t)$; après réduction, $G(t) = \ln\left(\dfrac{(2t-5)^4 t}{(t-2)^5}\right)$.

On a : $G(4) = 4 \ln(3) - 3 \ln(2)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(2 \cdot t-5)^4 \cdot t}{(t-2)^5} = 16$; donc,

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln\left(\dfrac{(2 \cdot t-5)^4 \cdot t}{(t-2)^5}\right) = 4 \cdot \ln(2)$.

Il s'ensuit que

$$\int_4^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} G(t) - G(4) = 4 \cdot \ln(2) - (4 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(2)) = 7 \cdot \ln(2) - 4 \cdot \ln(3)$$

Exercice 3

Partie A

1. a) La variable U suit une loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma^2 = \dfrac{1}{2}$. Une densité de U est donnée pour tout réel x par :

$$g := x \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2}$$

Ce qui s'écrit après simplification :

$$g(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

b) Si U a une variance, par définition, $Var(U) = E\left((U - E(U))^2\right)$; or $E(U) = 0$, donc $Var(U) = E\left(U^2\right)$.

On a $\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx$.

La fonction $x \to x^2 \cdot e^{-x^2}$ étant paire, on a donc $\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2. La fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-x^2} & otherwise \end{cases}$$

vérifie les propriétés suivantes :

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

* elle est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ où elle est constante, et sur $]0, +\infty[$ où elle est la différence d'une constante et de l'exponentielle d'une fonction monôme.

* On a $\lim_{x \to 0-} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0+} F(x) = 0$. Donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

* Sa dérivée $F'(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-x^2}$ est positive sur $]0, +\infty[$. Donc elle est croissante sur $]0,+\infty[$; d'autre part, elle est constante sur $]-\infty, 0]$ et est continue en 0 ; donc elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction F est la fonction de répartition d'une variable à densité. Une densité d'une telle variable est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2\,x\,e^{-x^2} & 0 < x \end{cases}$$

3. a) Etudions la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 2 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx$.

D'après la première question, nous savons déjà qu'elle converge et que

$$\int_0^{+\infty} 2 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Il s'ensuit que X a une espérance et que cette espérance $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) On a :

$$prob(X^2 \le y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ prob(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) & y > 0 \end{cases}$$

Par suite, pour $y > 0$, $prob(X^2 \le y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) = 1 - e^{-y}$. On peut donc écrire :

$$F_{X^2}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

c) On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1. Son espérance $E(X^2) = 1$ car l'espérance d'une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. Il s'ensuit que X a une variance

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Partie B

1. La variable Z suit une loi géométrique de paramètre p. Ainsi, pour tout entier naturel non nul k, $prob(Z = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$, $E(Z) = \frac{1}{p}$ et $Var(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

2. a) Chacune des variables Z_i a une espérance ; donc, $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$ a aussi une espérance et $m = E(M_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(Z_i) = \frac{1}{p}$. De même, chacune des variables Z_i a une variance et $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une famille de variables indépendantes. Donc M_n a une variance et $Var(M_n) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-p}{p^2}$. On en déduit que M_n a un écart type $\sigma_n = \frac{1}{p} \cdot \sqrt{\frac{1-p}{n}}$.

b) La famille $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une famille de variables indépendantes, de même loi, de même espérance m, et de même variance σ_n^2. D'après le théorème de la limite centrée, pour tout réel a et b,

$$\lim_{n \to +\infty} prob\left(a \le \frac{M_n - m}{\sigma_n} \le b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Pour $a = 0$ et $b = 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} prob(0 \le M_n - m \le \sigma_n) = \Phi(1) - \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$