

## BIOPHYSIQUE DE LA BACTERIE ESCHERICHIA COLI

### Partie I : Taille critique d'une bactérie aérobie

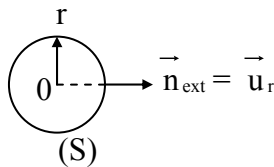
#### I.A) Densité particulière en dioxygène au voisinage de la bactérie

I.A.1) Loi de Fick :

$$\vec{j} = -D \vec{\text{grad}} n$$

$j$  : nombre de particules par unité de surface et de temps ( $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ )

I.A.2)



$$\phi(r) = - \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \vec{n}_{\text{ext}}, \quad \text{flux entrant de particules à travers (S).}$$

En régime stationnaire et en l'absence de sources,  $\phi(r)$  ne dépend pas de  $r$  ( $\text{div } \vec{j} = 0$ ).

D'où :

$$\phi = -j(r) 4 \pi r^2$$

I.A.3) On a :

$$\phi = \phi(r = R^+) = \phi(r \rightarrow \infty)$$

Avec la loi de Fick :

$$\phi = D \frac{dn}{dr} 4 \pi r^2 \Rightarrow dn = \frac{\phi}{4 \pi D} \frac{dr}{r^2}$$

et par intégration de  $r = R^+$  à  $r \rightarrow \infty$  :

$$\int_{n_1}^{n_\infty} dn = \int_R^\infty \frac{\phi}{4 \pi D} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow n_\infty - n_1 = \frac{\phi}{4 \pi D R}$$

Par ailleurs :

$$n_\infty = \mathcal{N}_A C_0$$

D'où :

$$n_1 = \mathcal{N}_A C_0 - \frac{\phi}{4 \pi D R}$$

#### I.B) Taille critique de la bactérie

I.B.1) Soit  $N(t)$  le nombre de molécules de dioxygène dissous dans la sphère de rayon  $R$  :

$$\frac{dN}{dt} = - \underbrace{m \mathcal{N}_A \mathcal{A}} + \phi$$

nombre de molécules de dioxygène  
consommés par unité de temps ( $s^{-1}$ )

En régime permanent :  $\frac{dN}{dt} = 0$

D'où :

$$\phi = m \mathcal{N}_A \mathcal{A} = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 \mathcal{N}_A \mathcal{A}$$

**I.B.2)** On en déduit :

$$n_1 = \mathcal{N}_A C_0 - \frac{1}{3} \frac{\mu R^2 \mathcal{N}_A \mathcal{A}}{D}$$

Donc  $n_1$  diminue si  $R$  augmente : lorsque la bactérie grossit, elle consomme plus de dioxygène, donc  $\phi$  augmente ainsi que  $\frac{dn}{dr}$ .

**I.B.3)** Pour que la bactérie ne suffoque pas, il faut :

$$n_1 \geq 0 \Rightarrow R \leq R_C = \sqrt{\frac{3 D C_0}{\mu \mathcal{A}}}$$

On a  $\frac{D C_0}{\mu \mathcal{A}}$  qui s'exprime en  $\frac{m^2 s^{-1} mol m^{-3}}{kg m^{-3} mol kg^{-1} s^{-1}}$ , soit en  $m^2$ , ce qui assure l'homogénéité de l'expression ci-dessus.

**A.N. :**  $R_C = 8 \mu m > R = 1 \mu m$ , ce qui assure que la bactérie E. Coli ne suffoque pas.

**I.B.4)** Le nombre de molécules consommés par unité de temps par la bactérie est :

$$m \mathcal{N}_A \mathcal{A} = \phi$$

Soit :

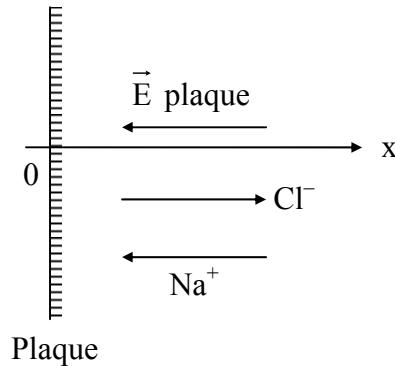
$$\phi = \frac{4}{3} \pi R_C^3 \mu \mathcal{N}_A \mathcal{A}$$

**A.N. :**  $\phi = 2 \cdot 10^{10} s^{-1}$

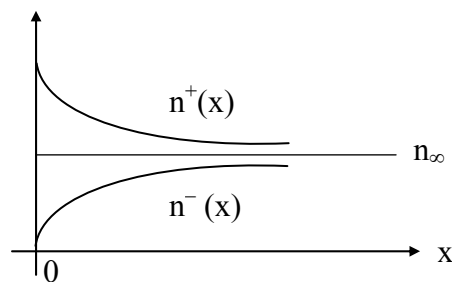
## Partie II : Propriétés électrostatiques de la membrane de la bactérie

### II.A) Etude préliminaire : longueur de Debye dans un électrolyte

#### II.A.1)



La plaque crée un champ uniforme  $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{x}$  au sein de l'électrolyte ; ce champ déplace les cations  $\text{Na}^+$  selon  $-\vec{x}$ , et les anions  $\text{Cl}^-$  selon  $+\vec{x}$ .



\* Au voisinage de la plaque :  $\rho(x) = (n^+(x) - n^-(x)) e > 0$

\* Loin de la plaque ( $x \gg \lambda$ ) :  $\rho(x) \rightarrow 0$  (électroneutralité)

$$\text{II.A.2) } \begin{cases} \vec{j}_D^+ = -D^+ \frac{d(n^+e)}{dx} \vec{x} \\ \vec{j}_D^- = -D^- \frac{d(-n^-e)}{dx} \vec{x} \end{cases} \quad (\text{loi de Fick})$$

II.A.3) Les vecteurs densité de courant de cations et d'anions sont donnés respectivement par :

$$\begin{cases} \vec{j}_e^+ = n^+ e \vec{v}^+ = n^+ e \mu^+ \vec{E} \\ \vec{j}_e^- = n^- (-e \vec{v}^-) = -n^- e \mu^- \vec{E} \end{cases}$$

II.A.4) Equations de Maxwell de l'électrostatique :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \psi \text{ tq } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \psi \end{cases}$$



**II.A.5) a)** A l'équilibre :

$$\begin{cases} \vec{j}_D^+ + \vec{j}_e^+ = \vec{0} \\ \vec{j}_D^- + \vec{j}_e^- = \vec{0} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} -D^+ \frac{dn^+}{dx} + n^+ \mu^+ \left( -\frac{d\psi}{dx} \right) = 0 \\ D^- \frac{dn^-}{dx} - n^- \mu^- \left( -\frac{d\psi}{dx} \right) = 0 \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} D^+ \frac{dn^+}{dx} = -\mu^+ \frac{d\psi}{dx} n^+ \\ D^- \frac{dn^-}{dx} = -\mu^- \frac{d\psi}{dx} n^- \end{cases}$$

**b)** On peut intégrer les 2 relations ci-dessus :

$$\begin{cases} \frac{dn^+}{n^+} = -\frac{\mu^+}{D^+} d\psi \\ \frac{dn^-}{n^-} = -\frac{\mu^-}{D^-} d\psi \end{cases}$$

avec  $\begin{cases} \psi(x \rightarrow \infty) = 0 \\ n(x \rightarrow \infty) = n_\infty \end{cases}$ , on obtient :

$$\begin{cases} n^+(x) = n_\infty \exp\left(-\frac{\mu^+}{D^+} \psi(x)\right) \\ n^-(x) = n_\infty \exp\left(-\frac{\mu^-}{D^-} \psi(y)\right) \end{cases}$$

**c)** Avec  $\begin{cases} \frac{\mu^+}{D^+} = \frac{e}{k_B T} \\ \frac{\mu^-}{D^-} = -\frac{e}{k_B T} \end{cases}$

On retrouve une distribution d'ions obéissant à la loi statistique de Maxwell Boltzmann :

$$\begin{cases} n_+(x) = n_\infty \exp\left(-\frac{\xi^+(x)}{k_B T}\right), \xi^+ = +e\psi \\ n_-(x) = n_\infty \exp\left(-\frac{\xi^-(x)}{k_B T}\right), \xi^- = -e\psi \end{cases}$$

**II.A.6) a)**  $\rho(x) = [n^+(x) - n^-(x)] e$

Soit :  $\rho(x) = -2 n_{\infty} e \operatorname{sh}\left(\frac{e\psi(x)}{k_B T}\right)$

Et :  $\rho(x) \approx -\frac{2 n_{\infty} e^2}{k_B T} \psi(x)$  si  $|e\psi(x)| \ll k_B T$

**b)**  $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} \psi \end{cases} \Rightarrow \Delta \psi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$  (équation de Poisson)

**c)** On en déduit :  $\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2 n_{\infty} e^2}{\varepsilon k_B T} \psi(x)$

En posant :  $\lambda^2 = \frac{\varepsilon k_B T}{2 n_{\infty} e^2}$ , on obtient :  $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{\lambda^2} \psi = 0$

**d)** La solution est :  $\psi(x) = \psi_1 e^{-x/\lambda} + \psi_2 e^{x/\lambda}$

$$\begin{cases} \psi \rightarrow 0 : \psi_2 = 0 \\ x \rightarrow \infty \\ -\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0^+} = \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\varepsilon} e^{-x/\lambda} = +\frac{1}{\lambda} \psi_1 \end{cases}$$

Ainsi :  $\psi(x) = \frac{\lambda \sigma_{\text{eff}}}{\varepsilon} e^{-x/\lambda}$

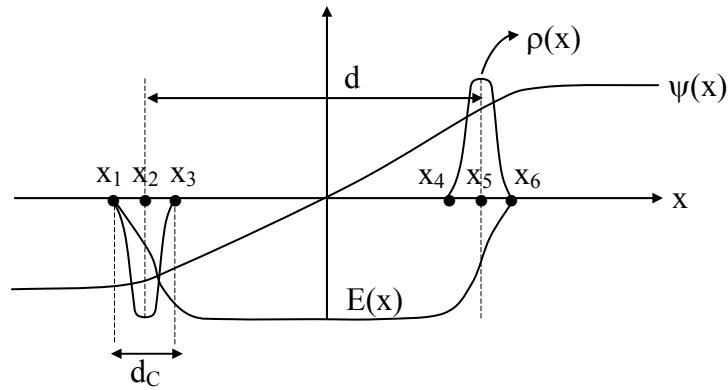
$\sigma_{\text{eff}}$  est la charge surfacique des ions au voisinage de la plaque, où sont accumulés les cations  $\text{Na}^+$  :  $\sigma_{\text{eff}} > 0$ .

**e)** On a alors :  $\rho(x) = -\varepsilon \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\lambda} e^{-x/\lambda}$

$\lambda$  s'interprète donc comme une distance caractéristique d'écrantage des effets électrostatiques de la plaque sur l'électrolyte : pour  $x \gg \lambda$ ,  $\rho(x) \approx 0$ .

## II.B) Répartition des charges de part et d'autre de la membrane de la bactérie

**II.B.1)** On obtient l'allure de  $\psi(x)$  à partir de :  $E(x) = -\frac{d\psi}{dx}$



**II.B.2)** On obtient  $\rho(x)$  par :  $\rho(x) = \epsilon \frac{dE}{dx}$  ( $\rho$  nulle si  $E = \text{cste}$ ,  $|\rho|$  maximale en  $x_2$  et  $x_5$ , points d'inflexion de  $E(x)$ ).

**II.B.3) a)** A l'extérieur comme à l'intérieur, le potentiel électrostatique  $\psi(x)$  se stabilise à une distance de la membrane de l'ordre de la longueur de Debye  $\lambda$  ; c'est dans cette région que des charges volumiques apparaissent :

$$d_C \approx \lambda \approx \sqrt{\frac{\epsilon k_B T}{2 n_\infty e^2}}$$

**b)** On a : 
$$2 n_\infty = \frac{\mathcal{N}_A C_{\text{NaCl}}}{(M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}})} \mathcal{N}_A \quad C_{\text{NaCl}} = 5 \text{ g l}^{-1}$$
  

$$(n^+ + n^-)_\infty$$

**A.N. :** 
$$d_C = 1,5 \text{ nm} = x_6 - x_4 = x_3 - x_1$$

Comme  $d_C \ll d$ , on peut considérer que  $\psi = \text{cste}$  au voisinage de la membrane : le potentiel de membrane est donc la différence de potentiel entre le milieu extérieur et le cytoplasme (cf. II.C)).

## II.C) Potentiel de repos de la membrane

**II.C.1)**

|                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| int                      | ext                      |
| $\rho_{K^+ \text{ int}}$ | $\rho_{K^+ \text{ ext}}$ |
| 0                        |                          |
| Membrane                 |                          |

$\vec{E} \rightarrow x$

Comme  $\rho_{K^+ \text{ int}} > \rho_{K^+ \text{ ext}}$  : 
$$\vec{E} = E(x) \vec{x}, E(x) > 0$$

( $\vec{E}$  orienté des zones les plus chargées vers les zones les moins chargées).

**II.C.2) a)** On intègre la relation fournie par l'énoncé :

$$d\psi = - \frac{k_B T}{e} \frac{dn}{n} \Rightarrow \Delta\psi = \psi_{\text{int}} - \psi_{\text{ext}} = \frac{k_B T}{e} \ln \left( \frac{n_{\text{ext}}}{n_{\text{int}}} \right)$$

b) A.N. :  $d\psi = -0,12 \text{ V}$  (bon ordre de grandeur d'un potentiel de membrane).

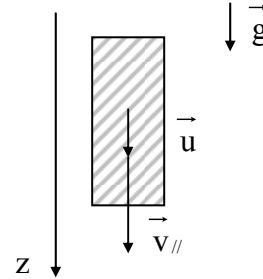
### Partie III : Propulsion d'un micro-organisme par flagelle

#### III.A) Chute d'un bâtonnet dans un fluide visqueux

III.A.1) \* Bâtonnet vertical :

$$m \frac{d\vec{v}_{//}}{dt} = \vec{P} - \eta \lambda_{//} \vec{v}_{//} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{//} = \frac{\vec{P}}{\eta \lambda_{//}}}$$

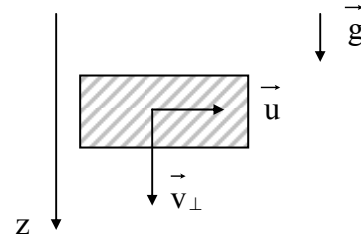
en régime permanent



\* Bâtonnet horizontal :

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \vec{P} - \eta \lambda_{\perp} \vec{v}_{\perp}$$

Donc de même, en régime permanent :  $\boxed{\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{P}}{\eta \lambda_{\perp}}}$



Comme  $\vec{v}_{//} = 2 \vec{v}_{\perp}$  :  $\boxed{\tau = \frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{//}} = 2}$

III.A.2) On sait que la force de viscosité dans un écoulement laminaire de champ de vitesses  $\vec{v} = v(y) \vec{x}$  est donnée par :

$$\vec{dF} = \eta \frac{dv}{dy} dS \vec{x}$$

Donc :  $[\lambda v] = \left[ \frac{dv}{dy} S \right]$ , soit :  $\boxed{[\lambda] = [L] \text{ et } \alpha = 1}$

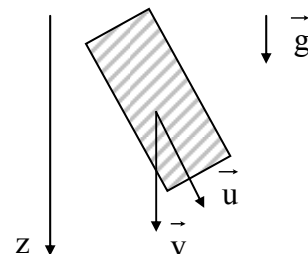
III.A.3) Cas général :  $\begin{cases} \lambda_{//} = KL \\ \lambda_{\perp} = 2 KL \end{cases}$

$$\vec{F} = -\eta [\lambda_{\perp} \vec{v}_{\perp} + \lambda_{//} \vec{v}_{//}] = -KL\eta [2 \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{//}]$$

avec :  $\begin{cases} \vec{v}_{//} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u} \\ \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{//} \end{cases}$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{F} = -KL\eta [2 \vec{v} - \vec{v}_{//}]}$$



### III.B) Propulsion d'une bactérie par flagelle ; aspect cinématique

**III.B.1) a)** Pour un tour complet de l'hélice, la bactérie se déplace du pas  $2 \Pi h$  de l'hélice :  
 $d = 2 \Pi h$ .

Ainsi :

$$v = \frac{d}{\tau} = \frac{\Omega d}{2 \Pi} = \Omega h$$

**A.N. :**  $v = 70 \mu\text{ms}^{-1}$

**b)**  $\text{Re} = \frac{\mu a v}{\eta} \approx 10^{-5} \ll 1$

**III.B.2) a)** Le point M décrit un cercle de rayon  $a$  à la vitesse angulaire  $\Omega$  :

$$\vec{v} = a \Omega \vec{e}_\theta$$

**b)** 
$$\begin{array}{c|c} d\vec{OM} & \begin{array}{l} dr = 0 \\ ad\theta \\ hd\theta \end{array} \\ \hline (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) & \end{array} \quad ; \quad \vec{u} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \begin{array}{l} 0 \\ a \\ h \end{array}$$

Puis :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{av}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a^2 \Omega}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Alors :

$$\vec{v}_{//} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \frac{a^2 \Omega}{a^2 + h^2} [a \vec{e}_\theta + h \vec{e}_z]$$

### III.C) Existence d'une force propulsive

**III.C.1) a)** Avec  $dL = \sqrt{a^2 + h^2} d\theta$  :

$$d\vec{F}_1 = -4 \Pi \eta \sqrt{a^2 + h^2} \left[ 2 a \Omega \vec{e}_\theta - \frac{a^2 \Omega}{a^2 + h^2} (a \vec{e}_\theta + h \vec{e}_z) \right] d\theta$$

Soit :

$$\begin{array}{c|c} d\vec{F}_1 = -4 \Pi \eta \sqrt{a^2 + h^2} a \Omega d\theta & \begin{array}{l} 0 \\ 2 - \frac{a^2}{a^2 + h^2} \\ -\frac{ah}{a^2 + h^2} \end{array} \\ \hline (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) & \end{array}$$

b) L'intégration sur un nombre entier de tours donne une force résultante selon Oz  
 $(\int_{-2\Pi p}^0 \vec{e}_\theta d\theta = \vec{0}).$

Alors :

$$\vec{F}_1 = -4 \Pi \eta \sqrt{a^2 + h^2} a \Omega \left( \frac{-ah}{a^2 + h^2} \right) 2\Pi p \vec{e}_z$$

Soit :

$$\vec{F}_1 = 4 \Pi \eta \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}} L \Omega \vec{e}_z$$

Donc, si  $\Omega > 0$ , la force exercée par le fluide sur le flagelle est propulsive selon Oz.

III.C.2) Par linéarité :  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , soit :

$$\vec{F} = \frac{4 \Pi \eta L}{\sqrt{a^2 + h^2}} \left[ ah\Omega - \left( \frac{h^2 + 2a^2}{a} \right) v \right] \vec{e}_z$$

III.C.3) a)  $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{F}_2\|} = \frac{3aR\sqrt{a^2 + h^2}}{2L(a^2 + h^2)}$

A.N. :

$$\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{F}_2\|} = 0,04 \ll 1$$

b) En négligeant la force de traînée sur la sphère, l'équation de son mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Pi}_A + \vec{P}$$

Comme  $\mu_{\text{bactérie}} \approx \mu_{\text{eau}}$  :  $\vec{\Pi}_A + \vec{P} = \vec{0}$

En régime permanent :  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ , donc  $\vec{F} = \vec{0}$ , ce qui donne :

$$\vec{v}_P = \frac{a^2 h}{2a^2 + h^2} \Omega \vec{e}_z$$

A.N. :  $v_P = 31 \mu\text{ms}^{-1}$  (même ordre de grandeur que le résultat grossier  $\Omega h$  de la question III.B.1)a), la force de traînée étant cependant moins efficace qu'un simple vissage pour faire avancer la bactérie.

### III.D) Aspect énergétique

III.D.1)  $d\vec{\mathcal{M}}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge (d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2)$

**III.D.2)** Démontrons le résultat donné par l'énoncé. Pour ce faire, on explicite  $d\vec{F}_2$  :

$$d\vec{F}_2 = -4 \Pi \eta \left[ 2 v_p \vec{e}_z - \frac{vh}{\sqrt{a^2 + h^2}} \vec{u} \right] dL$$

Ainsi :

$$d\vec{\mathcal{M}}_0 \cdot \vec{e}_z = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & dF_{1\theta} + dF_{2\theta} & 0 \\ h\theta & dF_{1z} + dF_{2z} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(dF_{1\theta} + dF_{2\theta})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} F_{1\theta} = -4 \Pi \eta \sqrt{a^2 + h^2} a \Omega \left( 2 - \frac{a^2 h}{2 a^2 + h^2} \right) d\theta \\ F_{2\theta} = 4 \Pi \eta v_p h \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} d\theta = 4 \Pi \eta \frac{h^2 a^3 \Omega d\theta}{\sqrt{a^2 + h^2} (2 a^2 + h^2)} \end{cases}$$

Après simplifications, on obtient bien le résultat fourni par l'énoncé ( $\mathcal{M}_z = 2 \Pi P d\vec{\mathcal{M}}_0 \cdot \vec{e}_z$ ).

**A.N. :**  $\mathcal{M}_z = -4,4 \times 10^{-18} \text{ Nm}$

**III.D.3)**

$$\mathcal{P}_m = |\mathcal{M}_z| \Omega = 3,1 \times 10^{-15} \text{ W}$$

## Partie IV : Moteur rotatif biologique

### IV.A) Source d'énergie du moteur

**IV.A.1)** Pour une transformation monobare monotherme :

$$\Delta G = \Delta U + p\Delta V - T\Delta S$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \Delta U = (-p\Delta V + W') + Q \\ \Delta S \geq \frac{Q}{T} \end{cases}$$

$W'$  : travail « reçu » autre que celui des forces de pressions

D'où :

$$\Delta G \leq + W' \quad (\text{ou } -\Delta G \geq -W' = W)$$

Il y a égalité dans le cas d'une transformation réversible.

**IV.A.2)** Le passage des protons est réversible :  $\delta W = -dG$